

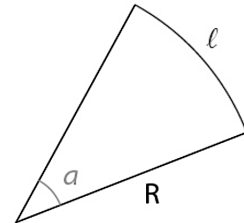
Trigonométrie

I Cercle trigonométrique et radian

1) Longueur d'arc

Propriété 1

La longueur l d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure a en degré ($0 \leq a \leq 360$) est : $l = R \times \frac{\pi \times a}{180}$



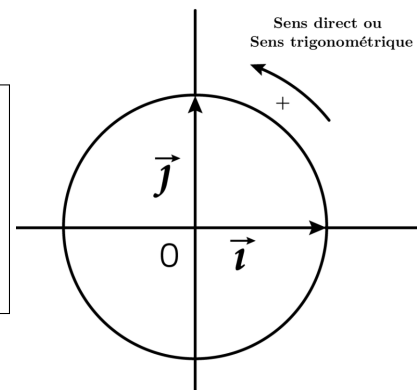
Exemple 1

La longueur d'un arc de cercle de rayon 1 et d'angle au centre de mesure 60° est :

2) Le cercle trigonométrique

Définition 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O , de rayon 1 et de sens inverse des aiguilles d'une montre (appelé aussi sens direct, ou sens trigonométrique)



3) Le radian

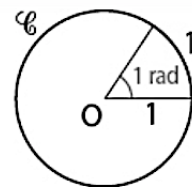
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π ($P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$)

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π . On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians

Définition 2

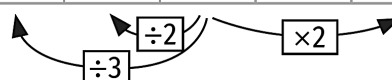
Soit C le cercle trigonométrique.

Le **radian** (noté rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur 1.



Ainsi, à 2π radians (un tour complet), on fait correspondre un angle de 360° , et on obtient par proportionnalité les correspondances suivantes :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	270	360
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Exemple 2

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 40°

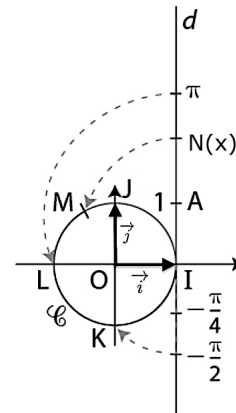
.....

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad

.....

4) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le cercle trigonométrique et une droite (d) tangente au cercle en I et orientée telle que $(I; \vec{j})$ soit un repère de la droite. Si l'on enroule la droite (d) autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle. La longueur de l'arc $\widehat{AM}$, est ainsi égale à la longueur AN

**II Mesure d'un angle orienté****1) Plusieurs enroulements de la droite**

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

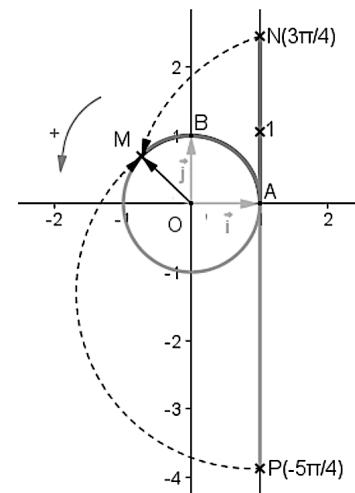
Exemple 3

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M .

En effet :

- On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant trois tours successifs. Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{27\pi}{4}$ correspondent au point M .

En effet :

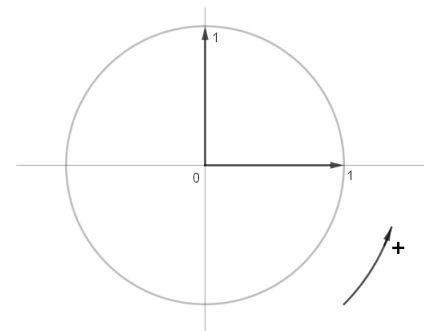
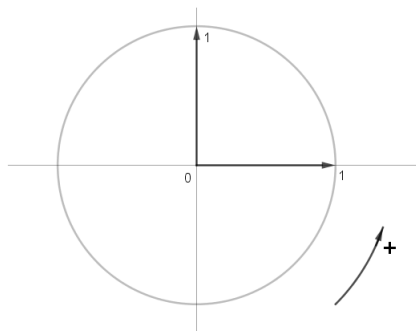
**Exercice 1**

1) Placer sur le 1^{er} cercle trigonométrique, le point M tel que $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{7\pi}{3}$ rad

.....

2) Placer sur le 2^{ème} cercle trigonométrique, le point N tel que $(\vec{i}; \overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{11\pi}{4}$ rad

.....



2) Mesure principale d'un angle orienté

Définition 3

La **mesure principale** d'un angle orienté est la mesure qui, parmi toutes les autres, se situe dans l'**intervalle** $] - \pi; \pi[$

Exemple 4

1) Donner 3 autres mesures de l'angle $\frac{11\pi}{6}$

.....

2) Donner la mesure principale de l'angle $\frac{34}{3}$

.....

III Sinus et cosinus d'un angle

1) Définitions

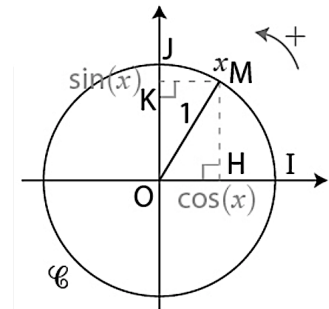
Définition 4

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct et C est le cercle trigonométrique de centre O .

M est un point de C , image d'un nombre réel x .

Le cosinus de x noté $\cos(x)$ est l'abscisse du point M

Le sinus de x noté $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M



2) Propriétés

Propriété 2

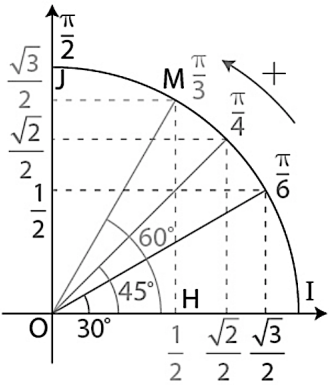
- 1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$
- 2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- 3) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- 4) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ avec k entier relatif

Démonstration

3) Valeurs remarquables

Tableau des valeurs remarquables

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstration
Montrons que $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

.....

.....

.....

Démonstration
Montrons que $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et que $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....