DS 4

produit scalaire

CORRECTION

DS4 produit scalaire
CORRECTION

Sujet A

Exercice 1

a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

$= BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = 5 \times 4 \times \cos(40°)$

$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \simeq 15{,}3}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - CA^2\right)$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(4^2 + 3^2 - 6^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{11}{2}}$

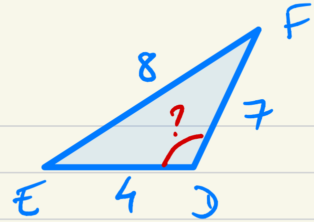
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -BA \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -3 \times 2 \times \cos(60°)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -3}$

Exercice 2



1) D'après le théorème d'Al Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

$$EF^2 = ED^2 + DF^2 - 2 \times ED \times DF \times \cos(\widehat{EDF})$$

$$8^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \times 4 \times 7 \times \cos(\widehat{EDF})$$

$$64 = 16 + 49 - 56\cos(\widehat{EDF})$$

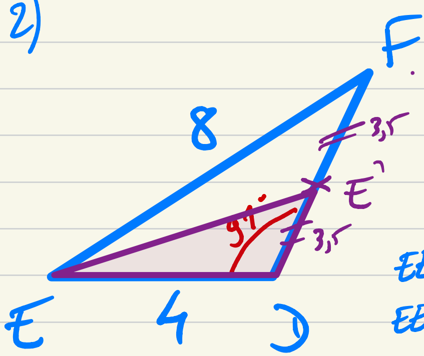
$$64 = 65 - 56\cos(\widehat{EDF})$$

$$64 - 65 = 56\cos(\widehat{EDF})$$

$$-1 = 56\cos(\widehat{EDF})$$

$$\cos(\widehat{EDF}) = -\frac{1}{56} \quad \text{donc} \quad \boxed{\widehat{EDF} \simeq 91^\circ}$$

2)



On se place dans le triangle DEE'
d'après le théorème d'Al Kashi

$$EE'^2 = ED^2 + E'D^2 + ED \times E'D \times \cos(\widehat{EDE'})$$

$$EE'^2 \simeq 4^2 + 3{,}5^2 + 4 \times 3{,}5 \times \cos(91^\circ)$$

$$EE' \simeq \sqrt{4^2 + 3{,}5^2 + 4 \times 3{,}5 \times \cos(91^\circ)}$$

$$\boxed{EE' \simeq 5{,}3}$$

Exercice 3

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \Big(\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}_{\text{Chasles}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}}_{\text{Chasles}}\Big)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraire donc

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD\times DA = -3\times 3$ $\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -9}$

L'angle $\widehat{DAB}$ est droit donc $\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0}$

L'angle $\widehat{ADC}$ est droit donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = 0}$

$\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens donc

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = DC\times AB = 2\times 4{,}5$ $\boxed{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 9}$

Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = -9+0+0+9$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

Donc les diagonales sont perpendiculaires

Exercice 4

1) Dans le triangle HCA rectangle en H, d'après le théorème de pythagore

$BC^2 = BH^2 + HC^2$ donc $HC^2 = BC^2 - BH^2$

$HC^2 = 13^2 - 12^2$ $HC^2 = 25$ donc $HC = \sqrt{25}$

$\underline{HC = 5}$ $AC = AH + HC = 9 + 5$ $\underline{AC = 14}$

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\|^2\right)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(15^2 + 13^2 - 14^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 99}$

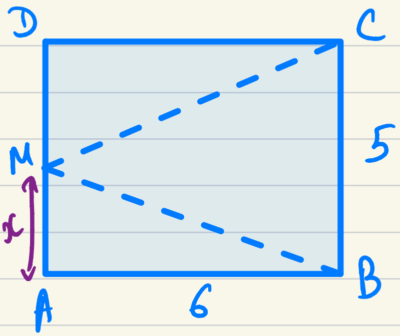
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$

$99 = 15 \times 13 \times \cos(\widehat{ABC})$

$99 = 195 \cos(\widehat{ABC})$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{99}{195}$ donc $\boxed{\widehat{ABC} \simeq 59°}$

Exercice 5



1) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MB}\|^2+\|\overrightarrow{MC}\|^2-\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(MB^2+MC^2-CB^2\right)$$

$CB=5$

$CB^2=25$

Dans le triangle ABM rectangle en A, d'après le théorème de pythagore :

$MB^2=AM^2+AB^2$ $\quad$ $MB^2=x^2+36$

Dans le triangle MDC rectangle en D, d'après le théorème de pythagore :

$MC^2=MD^2+DC^2$ $\quad$ $MD=AD-AM=5-x$

$MC^2=(5-x)^2+6^2$

$MC^2=25-10x+x^2+6^2$ $\quad$ $MC^2=x^2-10x+61$

Donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(x^2+36+x^2-10x+61-25\right)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\left(2x^2-10x+72\right)$ $\quad$ $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=x^2-5x+36}$

2) pour que le triangle MBC soit rectangle en M il faut que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Donc que $x^2 - 5x + 36 = 0$ $a = 1$ $b = -5$ $c = 36$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 36$

$\Delta = -119 < 0$ donc $x^2 - 5x + 36$ ne s'annule jamais

$\boxed{\text{Le triangle MBC ne peut pas être rectangle en M}}$

DS4 produit scalaire
CORRECTION

Sujet B

Exercice 1

a) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC})$

$= BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC}) = 6\times 3\times\cos(35°)$

$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \simeq 14,7}$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-CA^2\right)$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(3^2+2^2-7^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -18}$

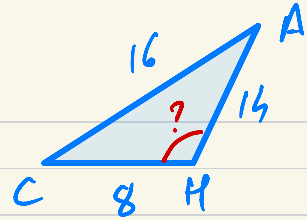
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -\|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -BA\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -4\times 3\times\cos(50°)$

$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} \simeq -7,7}$

Exercice 2



1) D'après le théorème d'Al Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

$$CA^2 = CH^2 + HA^2 - 2 \times CH \times HA \times \cos(\widehat{CHA})$$

$$16^2 = 8^2 + 14^2 - 2 \times 8 \times 14 \times \cos(\widehat{CHA})$$

$$256 = 64 + 196 - 224\cos(\widehat{CHA})$$

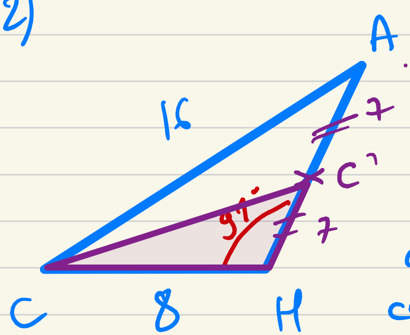
$$256 = 260 - 224\cos(\widehat{CHA})$$

$$256 - 260 = 224\cos(\widehat{CHA})$$

$$-4 = 224\cos(\widehat{CHA})$$

$$\cos(\widehat{CHA}) = \frac{-4}{224} \quad \text{donc} \quad \boxed{\widehat{CHA} \simeq 91^\circ}$$

2)



On se place dans le triangle CHC' d'après le théorème d'Al Kashi

$$CC'^2 = CH^2 + C'H^2 - 2 \times CH \times C'H \times \cos(\widehat{CHC'})$$

$$CC'^2 \simeq 8^2 + 7^2 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos(91^\circ)$$

$$CC' \simeq \sqrt{8^2 + 7^2 - 112\cos(91^\circ)}$$

$$\boxed{CC' \simeq 10{,}7}$$

Exercice 3

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \Big(\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}_{\text{chasles}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}}_{\text{chasles}}\Big)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires de sens contraire donc

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -AD\times DA = -6\times 6$ $\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -36}$

L'angle $\widehat{DAB}$ est droit donc $\boxed{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0}$

L'angle $\widehat{ADC}$ est droit donc $\boxed{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = 0}$

$\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de même sens donc

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = DC\times AB = 4\times 9$ $\boxed{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 36}$

Donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = -36+0+0+36$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

$\boxed{\text{Donc les diagonales sont perpendiculaires}}$

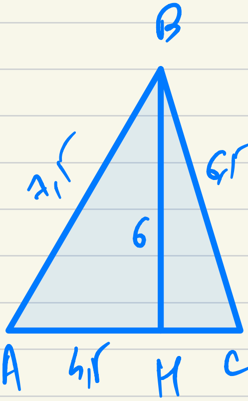
Exercice 4

1) Dans le triangle HCA rectangle en H, d'après le théorème de pythagore

$BC^2 = BH^2 + HC^2$ donc $HC^2 = BC^2 - BH^2$

$HC^2 = 6{,}5^2 - 6^2$ $\quad HC^2 = 6{,}25$ donc $HC = \sqrt{6{,}25}$

$\underline{HC = 2{,}5}$ $\quad AC = AH + HC = 4{,}5 + 2{,}5$ $\quad \underline{AC = 7}$



$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\|^2\right)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - CA^2\right) = \frac{1}{2}\left(7{,}5^2 + 6{,}5^2 - 7^2\right)$

$\boxed{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 24{,}75}$

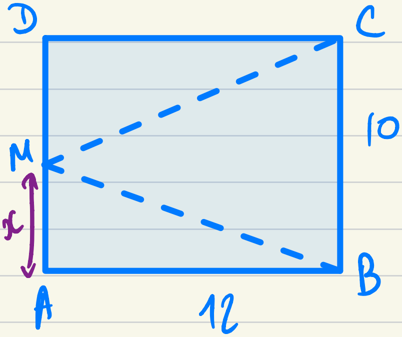
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC})$

$24{,}75 = 7{,}5 \times 6{,}5 \times \cos(\widehat{ABC})$

$24{,}75 = 48{,}75 \cos(\widehat{ABC})$

$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{24{,}75}{48{,}75}$ donc $\boxed{\widehat{ABC} \simeq 59°}$

Exercice 5



1) $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{MB}\|^2+\|\overrightarrow{MC}\|^2-\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(MB^2+MC^2-CB^2\right)$$

$CB = 10^2$

$CB^2 = 100$

Dans le triangle ABM rectangle en A, d'après le théorème de pythagore :

$MB^2 = AM^2 + AB^2$ $\quad MB^2 = x^2 + 144$

Dans le triangle MDC rectangle en D, d'après le théorème de pythagore :

$MC^2 = MD^2 + DC^2$ $\qquad MD = AD - AM = 10 - x$

$MC^2 = (10-x)^2 + 12^2$

$MC^2 = 100 - 20x + x^2 + 144$ $\qquad MC^2 = x^2 - 20x + 244$

Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\left(x^2+144 + x^2 - 20x + 244 - 100\right)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(2x^2 - 20x + 288)$ $\qquad \boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = x^2 - 10x + 144}$

2) pour que le triangle MBC soit rectangle en M
il faut que $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} =$

Donc que $x^2 - 10x + 144 = 0$ $a = 1$ $b = -10$ $c = 144$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 144$

$\Delta = -476 < 0$ donc $x^2 - 10x + 144$ ne s'annule jamais

$\boxed{\text{Le triangle MBC ne peut pas être rectangle en M}}$