Revisions probas 1eres spé

C.1 Dans cette expérience aléatoire, il n'existe que trois sorties possibles :

0 point ; 3 points ; 5 points

Ainsi, la somme des probabilités de ces évenemments vaut 1 :

$p_0 + p_3 + p_5 = 1$

Des relations données dans l'énoncé entre les divers probabilités, on obtient :

$p_3 = 2{\cdot}p_5$; $p_0 = 3{\cdot}p_5$

Ainsi, l'égalité obtenue précédemment devient :

$$\begin{aligned} p_0 + p_3 + p_5 &= 1 \\ 3{\cdot}p_5 + 2{\cdot}p_5 + p_5 &= 1 \\ 6{\cdot}p_5 &= 1 \\ p_5 &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On déduit les valeurs des deux autres probabilités :

$p_3 = 2{\cdot}p_5 = \dfrac{1}{3}$; $p_0 = 3{\cdot}p_5 = \dfrac{1}{2}$

C.2

1.
- Il y a 720 femmes employées dans cet entreprise. On en déduit la probabilité :
  $\mathcal{P}(F) = \dfrac{720}{1200} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$
- Il y a 618 personnes ayant choisis le train. On a :
  $\mathcal{P}(T) = \dfrac{618}{1200} = \dfrac{103}{200} = 0{,}515$
- La probabilité de choisir un employé n'ayant pas pris le train a pour valeur :
  $\mathcal{P}\big(\overline{T}\big) = 1 - \dfrac{103}{200} = \dfrac{97}{200} = 0{,}485$

2. a. D'après le tableau, il y a 468 femmes ayant choisies le train comme moyen de déplacement. On en déduit la probabilité :
   $\mathcal{P}(F\cap T) = \dfrac{468}{1200} = \dfrac{39}{100}$

   b. On a la formule :
   $$\mathcal{P}(F\cup T) = \mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(T) - \mathcal{P}(F\cap T)$$
   $$= \frac{720}{1200} + \frac{618}{1200} - \frac{468}{1200} = \frac{870}{1200} = \frac{29}{40}$$

C.3

1. 45 élèves sont inscrits au taekwondo ; ainsi, la probabilité de rencontrer un élève inscrit au taekwondo est de :
   $\dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4}$
2. 24 élèves le judo ; ainsi, la probabilité recherchée est :
   $\dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5}$
3. 6 élèves ne se sont inscrits à aucun sport ; ainsi, la probabilité de rencontrer un jeune ne faisant aucun sport est de :
   $\dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10}$
4. 6 élèves ne se sont inscrits à aucun sport donc au total 54 élèves pratiquent au moins un des deux sports. La probabilité recherchée est :
   $\dfrac{54}{60} = \dfrac{9}{10}$
5. Deux résolutions de cette questions sont possibles :
   - Il y a 54 élèves qui pratiquent au moins un sport ; or, 45 se sont inscrits au taekwondo et 24 au judo.
     Notons :
     $$\begin{cases} x\text{ : le nombre pratiquant uniquement le taekwondo} \\ y\text{ : le nombre pratiquant uniquement le judo} \\ z\text{ : le nombre pratiquant les deux sports} \end{cases}$$
     Ces nombres vérifient les relations :
     $$\begin{cases} x + y + z = 54 \\ x \phantom{{}+y} + z = 45 \\ \phantom{x+{}} y + z = 24 \end{cases}$$
     On en déduit qu'il y a 15 élèves participants aux deux sports ; ainsi, la probabilité de rencontrer un élève pratiquant les deux sports est :
     $\dfrac{15}{60} = \dfrac{1}{4}$
   - En notant K l'évènement "*l'élève fait du taekwondo*" et J l'évènement "*l'élève fait du judo*" et d'après la formule de la réunion :
     $$\begin{aligned} \mathcal{P}\big(K\cup J\big) &= \mathcal{P}\big(K\big) + \mathcal{P}\big(J\big) - \mathcal{P}\big(K\cap J\big) \\ \frac{9}{10} &= \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \mathcal{P}\big(K\cap J\big) \\ -\mathcal{P}\big(K\cap J\big) &= \frac{9}{10} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} \\ -\mathcal{P}\big(K\cap J\big) &= \frac{18}{20} - \frac{15}{20} - \frac{8}{20} \\ -\mathcal{P}\big(K\cap J\big) &= \frac{-5}{20} \\ \mathcal{P}\big(K\cap J\big) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

C.4

1. a. La bouteille contient 3 carrés sur un total de 13 éléments. On en déduit la proababilité d'obtenir un carré :
   $\mathcal{P}(A) = \dfrac{3}{13}$

   b. La bouteille contient 6 éléments rayés sur un total de 13. On en déduit que la probabilité d'obtenir un élément rayé est égale à :
   $\mathcal{P}(B) = \dfrac{6}{13}$

   c. Il n'y a que deux éléments carrés qui soient rayés. Ainsi, la probabilité d'obtenir un carré rayé est de :
   $\mathcal{P}(A\cap B) = \dfrac{2}{13}$

2. a. D'après les résultats de la question 1, on a le calcul suivant :
   $$\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{3}{13}} = \frac{2}{13}\times\frac{13}{3} = \frac{2}{3}$$

   b. Parmi les trois carrés, il y en a deux qui soient rayés. Ainsi, la probabilité d'obtenir un élément rayé parmi les carrés est égale à :
   $\mathcal{P}_A(B) = \dfrac{2}{3}$

   La première proposition est correcte

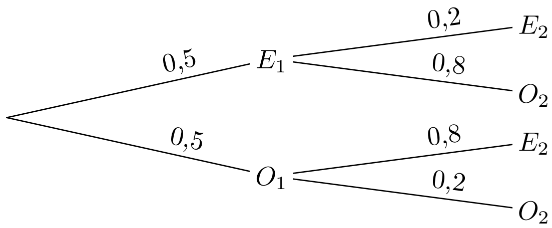
3. a. D'après les résultats de la question 1, on a le calcul suivant :

$$\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}=\frac{\frac{2}{13}}{\frac{6}{13}}=\frac{2}{13}\times\frac{13}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(b) Parmi les 6 éléments rayés, il y a 2 carrés.
La phrase complété est :
"*La probabilité des élèments carrés parmi les éléments rayés a une probabilité de* $\frac{1}{3}$"

C.5

(1) On a l'arbre de probabilité suivant :



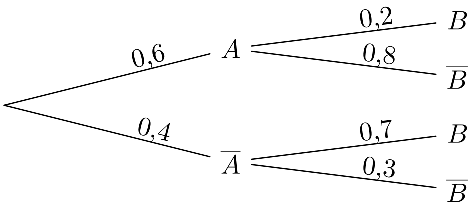
(2) On a les probabilités suivantes :
- $\mathcal{P}(E_1)=0{,}5$
- $\mathcal{P}_{E_1}(O_2)=0{,}8$
- $\mathcal{P}(E_1\cap E_2)=\mathcal{P}(E_1)\times\mathcal{P}_{E_1}(E_2)=0{,}5\times0{,}2=0{,}1$

(3) Considérons l'évènement M défini par :
M : "*le touriste deux fois à la même plage*"

On a : $M=(E_1\cap E_2)\cup(O_1\cap O_2)$

C'est une réunion de deux évènements disjoints :
$\mathcal{P}(M)=\mathcal{P}(E_1\cap E_2)+\mathcal{P}(O_1\cap O_2)=0{,}1+0{,}1=0{,}2$

C.6 En complétant l'arbre de probabilité, on obtient :



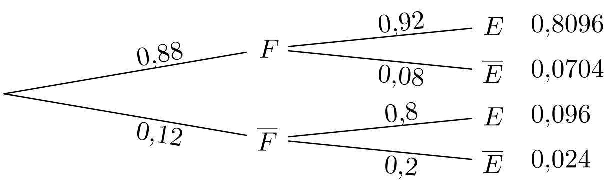
(a) D'après la lecture de l'arbre de probabilité, on a :
$\mathcal{P}_A(\overline{B})=0{,}8$

(b)
- D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :
$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B)=0{,}6\times0{,}2=0{,}12$
- D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :
$\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)=\mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)=0{,}4\times0{,}7=0{,}28$
- D'après la formule des probabilités totale, on a :
$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(B\cap A)+\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=0{,}12+0{,}28=0{,}4$

(c) D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :
$$\mathcal{P}_B(\overline{A})=\frac{\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathcal{P}}=\frac{0{,}28}{0{,}4}=0{,}7$$

C.7

(1)



(2) (a) On a la formule : $\mathcal{P}(\overline{F})=1-\mathcal{P}(F)=1-0{,}88=0{,}12$

(b) $\mathcal{P}_{\overline{F}}(\overline{E})=1-\mathcal{P}_{\overline{F}}(E)=1-0{,}8=0{,}2$

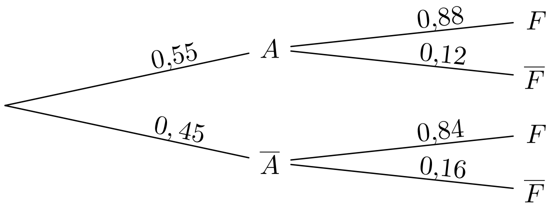
(c) D'après la formule de la probabilité conditionnelle, on a :
$\mathcal{P}(E\cap F)=\mathcal{P}_F(E)\times\mathcal{P}(F)=0{,}92\times0{,}88=0{,}8096$

(d) De même que dans la question précédente, on obtient :
$\mathcal{P}(E\cap\overline{F})=\mathcal{P}_{\overline{F}}(E)\times\mathcal{P}(\overline{F})=0{,}096$
Les événements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\mathcal{P}(E)=\mathcal{P}(E\cap F)+\mathcal{P}(E\cap\overline{F})=0{,}8096+0{,}096$$
$$=0{,}9056$$

(e) Tout conducteur ayant au moins ses freins ou son éclairage défectueux fait partie de l'ensemble $\overline{E}\cup\overline{F}$. Hors le complémentaire de cet événement $E\cap F$: c'est-à-dire que les freins et l'éclairage sont tous les deux en bon état. On obtient :
$\mathcal{P}(\overline{E}\cup\overline{F})=1-\mathcal{P}(E\cap F)=1-0{,}8096=0{,}1904$

C.8 Pour correctement modéliser l'énoncé, utilisons les deux évènements suivant :
- A : "*le fraisier est dans la serre A*"
- F : "*La fleur donne un fruit*"

Voici l'arbre de probabilité associé aux données de l'énoncé :



- **Proposition 1**

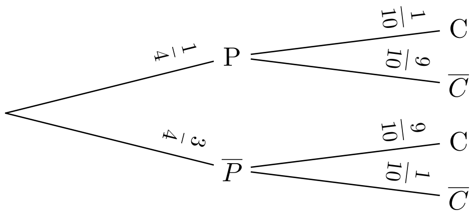
Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$\mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(F\cap A)+\mathcal{P}(F\cap\overline{A})$$
$$=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(F)+\mathcal{P}(\overline{A})\times\mathcal{P}_{\overline{A}}(F)$$
$$=0{,}55\times0{,}88+0{,}45\times0{,}84=0{,}484+0{,}378=0{,}862$$
La proposition est donc vraie.

- **Proposition 2**

On demande de déterminer la probabilité $\mathcal{P}_F(A)$. D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a :
$$\mathcal{P}_F(A)=\frac{\mathcal{P}(F\cap A)}{\mathcal{P}(F)}=\frac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(F)}{\mathcal{P}(F)}$$
$$=\frac{0{,}55\times0{,}88}{0{,}862}\approx0{,}561$$
La proposition est donc fausse.

C.9 Pour modéliser cette situation, on considère les deux évènements suivants :
- P : "*Il pleut*" ;
- C : "*Je sors le chien*".

On obtient l'arbre de probabilité suivant :



De l'arbre de probabilité, on en déduit les deux probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}\big(P\cap C\big)=\mathcal{P}(P)\cdot\mathcal{P}_P(C)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$
- $\mathcal{P}\big(\overline{P}\cap C\big)=\mathcal{P}(\overline{P})\cdot\mathcal{P}_{\overline{P}}(C)=\frac{3}{4}\times\frac{9}{10}=\frac{27}{40}$

Les deux évènements P et $\overline{P}$ forment une partition de l'univers Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a :

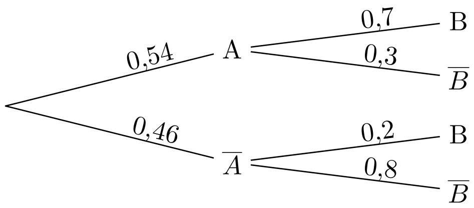
$$\mathcal{P}(C)=\mathcal{P}(C\cap P)+\mathcal{P}(C\cap\overline{P})=\frac{1}{40}+\frac{27}{40}=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$$

Par la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_C(P)=\frac{\mathcal{P}(P\cap C)}{\mathcal{P}(C)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{7}{10}}=\frac{1}{40}\times\frac{10}{7}=\frac{1}{28}$$

C.10

(1) Voici l'arbre complété :



(2) Par lecture de l'arbre de probabilité, on a les probabilités suivantes :

(a) $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}_A(B)=0{,}54\times0{,}7=0{,}378$

(b) $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)=\mathcal{P}(\overline{A})\cdot\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)=0{,}46\times0{,}2=0{,}092$

(c) Les deux événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. La formule de probabilité totale permet d'obtenir la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(B\cap A)+\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=0{,}378+0{,}092=0{,}47$

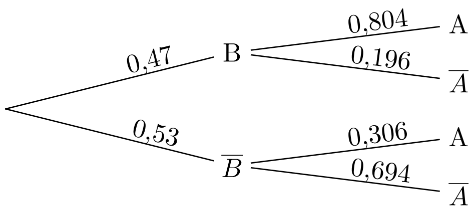
(d) Les formules des probabilités conditionnelles permettent d'obtenir les probabilités suivantes :
$$\mathcal{P}_B(A)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}=\frac{0{,}378}{0{,}47}\approx0{,}804$$

(3) (a) $\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=\mathcal{P}(A)\cdot\mathcal{P}_A(\overline{B})=0{,}54\times0{,}3=0{,}162$

(b) $\mathcal{P}\big(\overline{B}\big)=1-\mathcal{P}\big(B\big)=1-0{,}47=0{,}53$

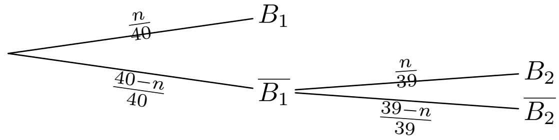
(c) $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)=\frac{\mathcal{P}(A\cap\overline{B})}{\mathcal{P}(\overline{B})}=\frac{0{,}162}{0{,}53}\approx0{,}306$

(4) Voici l'arbre de probabilité complété avec des valeurs approchées :



C.11

(1) Voici l'arbre de probabilité complété :



(2) (a) On a : $G=B_1\cup\big(\overline{B_1}\cap B_2\big)$

On a les probabilités des évènements :

- $\mathcal{P}\big(B_1\big)=\frac{n}{40}$
- $\mathcal{P}_{\overline{B_1}}\big(B_2\big)=\mathcal{P}\big(\overline{B_1}\big)\times\mathcal{P}_{\overline{B_1}}\big(B_2\big)=\frac{40-n}{40}\times\frac{n}{39}$
$=\frac{40n-n^2}{1560}$

Les deux évènements B_1 et $\overline{B_1}\cap B_2$ étant disjoints :
$$\mathcal{P}\big[B_1\cup\big(\overline{B_1}\cap B_2\big)\big]=\mathcal{P}\big(B_1\big)+\mathcal{P}\big(\overline{B_1}\cap B_2\big)$$
$$=\frac{39n+40n-n^2}{1560}=\frac{79n-n^2}{1560}$$

(b) Résolvons l'équation :
$$\mathcal{P}\big(G\big)=0{,}05$$
$$\frac{79n-n^2}{1560}=0{,}05$$
$$79n-n^2=0{,}05\times1560$$
$$79n-n^2=78$$
$$-n^2+79n-78=0$$

Le membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=79^2-4\times(-1)\times(-78)=5929$$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{5929}=77$

Le discriminant étant strictemetn positif, on en déduit que ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-79-77}{2\times(-1)}=\frac{-156}{-2}=78$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-79+77}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$$

L'urne contenant 40 boules, on en déduit que le forain doit mettre 1 seule boule bleu pour atteindre ses objectifs.

C.12

(1) Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}\big(B\big)=\mathcal{P}\big(B\cap A\big)+\mathcal{P}\big(B\cap\overline{A}\big)=\mathcal{P}\big(A\big){\cdot}\mathcal{P}_A\big(B\big)+\mathcal{P}\big(\overline{A}\big){\cdot}\mathcal{P}_{\overline{A}}\big(B\big)$$
$$=x{\cdot}\big(2x\big)+\big(1-x\big){\cdot}\big(3x\big)=2x^2+3x-3x^2=-x^2+3x$$

Résolvons l'équation :
$$\mathcal{P}\big(B\big)=\frac{29}{100}$$
$$-x^2+3x=\frac{29}{100}$$
$$-x^2+3x-\frac{29}{100}=0$$

Le polynôme du membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 3^2 - 4\times(-1)\times\left(-\frac{29}{100}\right) = 9 - \frac{29}{25}$$
$$= \frac{225}{25} - \frac{29}{25} = \frac{196}{25}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3-\frac{14}{5}}{2\times(-1)} = \frac{-\frac{15}{5}-\frac{14}{5}}{2\times(-1)} = \frac{-\frac{29}{5}}{-2} = \frac{29}{10}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-3+\frac{14}{5}}{2\times(-1)} = \frac{-\frac{15}{5}+\frac{14}{5}}{2\times(-1)} = \frac{-\frac{1}{5}}{-2} = \frac{1}{10}$$

On en déduit que la seule valeur possible de x est :

$$x = \frac{1}{10}$$

2. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B)}{-x^2+3x}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{x\times(2x)}{-x^2+3x}$$

D'après le produit en croix :

$$-x^2+3x = 5\times 2x^2$$
$$-x^2+3x = 10x^2$$
$$-x^2+3x-10x^2 = 0$$
$$-11x^2+3x = 0$$
$$x{\cdot}\big(-11x+3\big) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x = 0$$

$$-11x+3 = 0$$
$$-11x = -3$$
$$x = \frac{-3}{-11}$$
$$x = \frac{3}{11}$$

On en déduit que la seule possibilité est $x = \frac{3}{11}$