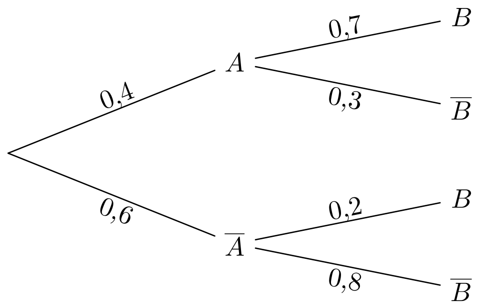
Exercices : Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Par lecture de cet arbre, donner les probabilités ci-dessous :

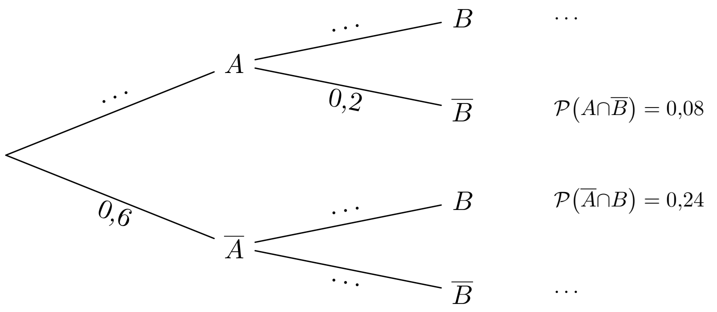
a. $\mathcal{P}_A(B)$ b. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$

2. Déterminer les probabilités ci-dessous :

a. $\mathcal{P}(A \cap B)$ b. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$

Exercice 2

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(A)$ b. $\mathcal{P}_A(B)$ c. $\mathcal{P}(A \cap B)$

d. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ e. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

Exercice 3

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province.

Une enquête est faite auprès des 1 200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport *(les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar)*

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise *(on suppose que tous les employés ont la même chance d'être interrogés).*

F l'évènement : "*l'employé est une femme*" ;

T l'évènement : "*l'employé choisit le train*".

1. Calculer les probabilités $\mathcal{P}(F)$, $\mathcal{P}(T)$ puis déterminer la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train *(on donnera les résultats sous forme décimale)*

2. a. Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap T$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $F \cup T$.

3. En choisissant un employé au hasard parmi les employés n'ayant pas choisi le train, quelle est la probabilité que cet employé soit une femme? *(on donnera le résultat arrondi au millième)*

Exercice 4

Dans un espace probabilisé, on considère les deux évènements A et B vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathcal{P}(A) = 0{,}64 \quad ; \quad \mathcal{P}_A(B) = 0{,}3 \quad ; \quad \mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}5$$

1. Construire un arbre de probabilité représentant cette situation.

2. a. Déterminer les probabilités des évènements suivants : $\mathcal{P}(A \cap B)$; $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$

b. A l'aide de la formule des probabilités totale, déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 5

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.
On note F l'événement "*le véhicule contrôlé a des freins en bon état*".
On note E l'événement "*le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état*".

$\overline{E}$ et $\overline{F}$ désignent les événements contraires de E et F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.

2. a. Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(\overline{F})$ de l'événement $\overline{F}$.

b. Quelle est la probabilité $\mathcal{P}_{\overline{F}}(\overline{E})$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

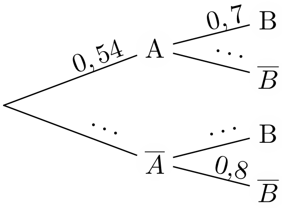
c. Montrer que la probabilité $\mathcal{P}(E \cap F)$ de l'événement $E \cap F$ est égale à 0,8096.

d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état?

e. Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

Exercice 6

Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. Voici un arbre de probabilité réalisé avec ces deux évènements :



1. Compléter l'arbre de probabilité représentant cette expérience aléatoire.

2. Justifier chacune des valeurs suivantes *(arrondies au millième près)* :

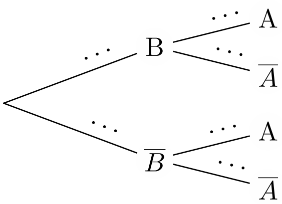
   a. $\mathcal{P}(A \cap B) = 0{,}378$ b. $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}092$

   c. $\mathcal{P}(B) = 0{,}47$ d. $\mathcal{P}_B(A) \approx 0{,}804$

3. Déterminer les probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$ d. $\mathcal{P}(\overline{B})$ f. $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)$

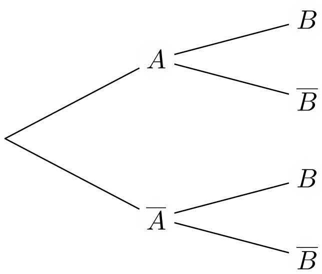
4. Construire l'arbre de probabilité ci-contre en le complétant avec les valeurs des probabilités arrondies au millième :

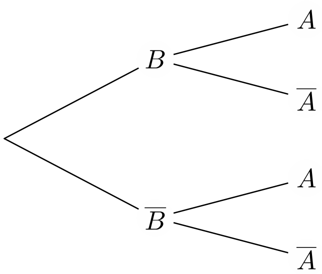


Exercice 7

Dans un espace probabilisé, on considère deux évènements A et B. On connait les probabilités suivantes :

$\mathcal{P}(A) = 0{,}3$; $\mathcal{P}_A(B) = 0{,}8$; $\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}6$





Compléter, si nécessaire avec des valeurs arrondies au centième, les deux arbres de probabilité ci-dessus.

Exercice 8

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

- D : l'évènement "*le composant est défectueux*" ;
- F_1 : l'évènement "*le composant provient du premier fournisseur*" ;
- F_2 : l'évènement "*le composant provient du second fournisseur*".

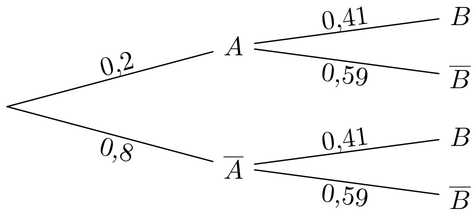
1. Dresser un arbre de probabilité correspondant à cette situation.

2. Calculer $P(D \cap F_1)$, puis démontrer : $P(D) = 0{,}022\,5$

3. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ? On arrondiera sa valeur au millième près.

Exercice 9

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

2. Etablir que les évènements A et B sont indépendants.

Exercice 10

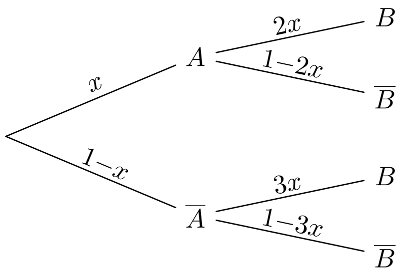
Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$\mathcal{P}(A) = 0{,}3$; $\mathcal{P}(A \cup B) = 0{,}35$.

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 11

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-dessous



et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :

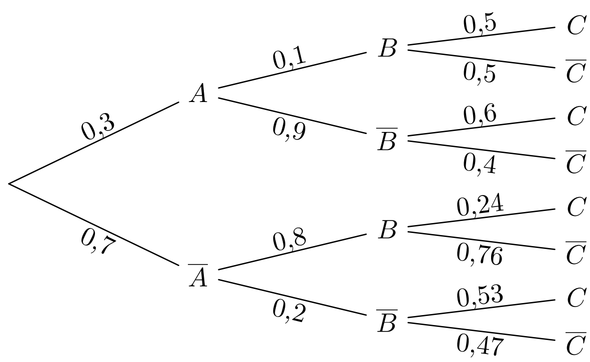
$\mathcal{P}(A) = x$; $\mathcal{P}_A(B) = 2x$; $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B) = 3x$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}(B) = \dfrac{29}{100}$.
   Déterminer la valeur de x.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_B(A) = \dfrac{1}{5}$.
   Déterminer la valeur de x.

Exercice 12

On considère une expérience aléatoire et trois de ces évènements A, B et C permettant de construire l'arbre de probabilité suivant :



1. En relevant les valeurs sur l'arbre de probabilité, donner les probabilités :

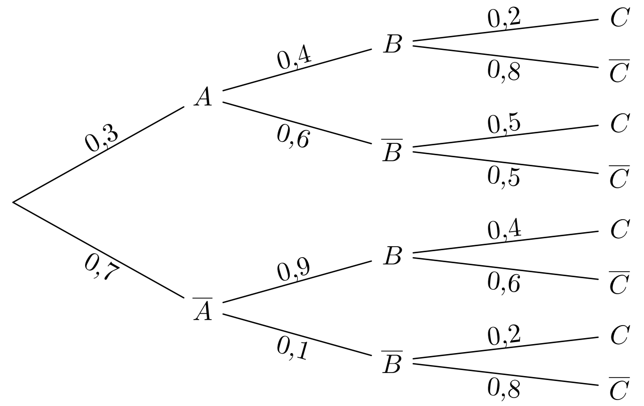
   a. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$ b. $\mathcal{P}_{A \cap B}(C)$ c. $\mathcal{P}_{A \cap \overline{B}}(\overline{C})$

2. Déterminer les probabilités :

a. $\mathcal{P}(A \cap B)$ b. $\mathcal{P}(A \cap B \cap C)$ c. $\mathcal{P}(A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$

Exercice 13

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-dessous :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

2. Etablir que les évènements A et C sont indépendant?

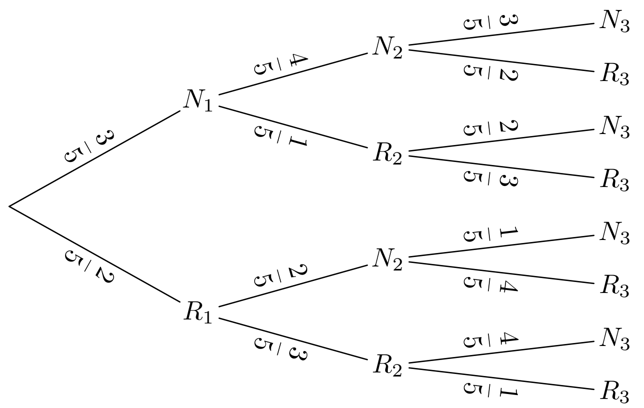
Exercice 14

On considère trois urnes qui contiennent chacune des boules noires et rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne. Pour tout $i \in \{1;2;3\}$, on considère les évènements suivants :

- N_i : "*on tire une boule noire de l'urne U_i*" ;
- R_i : "*on tire une boule rouge de l'urne U_i*".

On considère l'arbre de probabilité suivant :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement N_3.

2. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendant?