Première spé - DS dérivation

C.1 Avant de déterminer la valeur du nombre dérivée en -1, effectuons les calculs suivants :

- On a les transformations algébriques suivantes :
$f(-1+h)=(-1+h)^2+3\times(-1+h)+1$
$=(-1)^2+2\times(-1)\times h+h^2-3+3\cdot h+1$
$=1-2\cdot h+h^2-3+3\cdot h+1=h^2+h-1$
- $f(-1)=(-1)^2+3\times(-1)+1=1-3+1=-1$

Le nombre dérivée $f'(-1)$ de la fonction f en -1 a pour valeur :
$$f'(-1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+h-1-(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h^2+h}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{h\cdot(h+1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}h+1=1$$

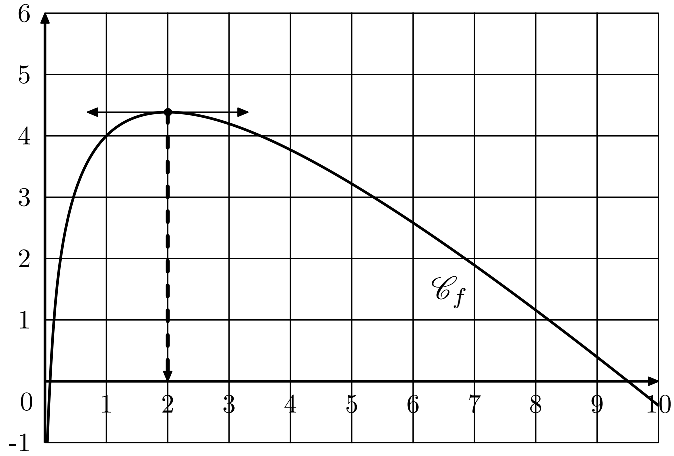
C.2
- Simplifions l'expression suivante :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\dfrac{2\cdot(1+h)+1}{(1+h)+2}-\dfrac{2\times 1+1}{1+2}}{h}$$
$$=\Big(\frac{2+2\cdot h+1}{h+3}-\frac{2+1}{3}\Big)\times\frac{1}{h}=\Big(\frac{2\cdot h+3}{h+3}-\frac{3}{3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$=\Big(\frac{2\cdot h+3}{h+3}-1\Big)\times\frac{1}{h}=\Big(\frac{2\cdot h+3}{h+3}-\frac{h+3}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h}$$
$$=\Big(\frac{(2\cdot h+3)-(h+3)}{h+3}\Big)\times\frac{1}{h}=\frac{2\cdot h+3-h-3}{h+3}\times\frac{1}{h}$$
$$=\frac{h}{h+3}\times\frac{1}{h}=\frac{1}{h+3}$$
- On en déduit la limite :
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{h+3}=\frac{1}{3}$$
- Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f pour $x=1$ a pour valeur $\frac{1}{3}$.

C.3 On a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\frac{\sqrt{3(1+h)+1}-\sqrt{3\times 1+1}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{3+3\cdot h+1}-\sqrt{3+1}}{h}=\frac{\sqrt{3\cdot h+4}-\sqrt{4}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{3\cdot h+4}-2}{h}=\frac{(\sqrt{3\cdot h+4}-2)(\sqrt{3\cdot h+4}+2)}{h(\sqrt{3\cdot h+4}+2)}$$
$$=\frac{(\sqrt{3\cdot h+4})^2-2^2}{h(\sqrt{3\cdot h+4}+2)}=\frac{(3\cdot h+4)-4}{h(\sqrt{3\cdot h+4}+2)}$$
$$=\frac{3\cdot h}{h(\sqrt{3\cdot h+4}+2)}=\frac{3}{\sqrt{3\cdot h+4}+2}$$
Lorsque h tend vers 0, on a :
$$\lim_{h\mapsto 0}\sqrt{3\cdot h+4}+2=\sqrt{4}+2=2+2=4$$
On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction g en 1 :
$$g'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{3}{\sqrt{3\cdot h+4}+2}=\frac{3}{4}$$

C.4 La réponse correcte est (b) :

Lorsque le nombre dérivée en x de la fonction f est nul : le coefficient directeur de la tangente de la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x est nul.
Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Or, sur la représentation graphique de la courbe $\mathscr{C}_f$, celle-ci n'accepte une tangente parallèle à l'axe des abscisses qu'en *un point* d'abscisse d'environ 2.



C.5
(1) (a) On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\frac{\big[2(1+h)^3-3(1+h)^2-(1+h)+1\big]-\big(2\times 1^3-3\times 1^2-1+1\big)}{h}$$
$$=\frac{2(1+h)(1+h)^2-3(1+2h+h^2)-1-h+1-(-1)}{h}$$
$$=\frac{(2+2h)(1+2\cdot h+h^2)-3-6h-3h^2-h+1}{h}$$
$$=\frac{(2+4\cdot h+2\cdot h^2+2\cdot h+4\cdot h^2+2\cdot h^3)-3\cdot h^2-7\cdot h-2}{h}$$
$$=\frac{2\cdot h^3+3\cdot h^2-h}{h}=\frac{h\cdot(2\cdot h^2+3\cdot h-1)}{h}=2\cdot h^2+3\cdot h-1$$

(b) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est le nombre dérivée de la fonction f en 1. Sa valeur est :
$$f'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}2\cdot h^2+3\cdot h-1=-1$$
Ainsi, la tangente (T) a pour coefficient directeur -1.

(2) La tangente (T) ayant -1 pour coefficient, son équation réduite est de la forme :
$$y=-x+b \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$
Le point de contact $(1\,;-1)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente (T). Ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (T) :
$$-1=-1\times 1+b$$
$$b=-1+1$$
$$b=0$$
La tangente (T) admet pour équation réduite :
$$y=-x$$

(3) (a) Donnons l'expression développée et réduite des deux

membres de l'égalité :

- $f(x)+x=\big(2x^3-3x^2-x+1\big)=2x^3-3x^2+1$
- $(x-1)(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c)$
$=\big(a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x\big)-\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)$
$=a{\cdot}x^3+b{\cdot}x^2+c{\cdot}x-a{\cdot}x^2-b{\cdot}x-c$
$=a{\cdot}x^3+\big(b-a\big){\cdot}x^2+\big(c-b\big)x-c$

Par identification des mônomes de même degré de ces deux formes développées et réduites, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b-a = -3 \\ c-b = 0 \\ -c = 1 \end{cases}$$

On vérifie facilement que les valeurs de a, b et c solutions de ce système sont :
$a=2\quad;\quad b=-1\quad;\quad c=-1$

Ainsi, on obtient la factorisation suivante :
$f(x)+x=\big(x-1\big)\big(2{\cdot}x^2-x-1\big)$

b Les points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite (T) doivent avoir leur abscisse solution de l'équation :

$$f(x)=-x$$
$$f(x)+x=0$$

D'après la question a, on a :
$\big(x-1\big){\cdot}\big(2{\cdot}x^2-x-1\big)=0$

Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. On obtient les deux équations suivantes :

$x-1=0$	$2x^2-x-1=0$
$x=1$	

Etudions la seconde équation.
Le membre de gauche de cette équation est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-1)^2-4{\times}2{\times}(-1)=1+8=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit que cette équation admet les deux solutions suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)-3}{2{\times}2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-1)+3}{2{\times}2}=\frac{4}{4}=1$$

Ainsi, cette équation admet deux solutions :
$\mathcal{S}=\Big\{-\frac{1}{2}\,;1\Big\}$

Déterminons les coordonnées des deux points de $\mathcal{C}_f$ admettant $-\frac{1}{2}$ et 1 pour abscisse :

- Pour $x{=}-\frac{1}{2}$:

$$f\Big(-\frac{1}{2}\Big)=2{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^3-3{\times}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2-\Big(-\frac{1}{2}\Big)+1$$
$$=-\frac{2}{8}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

- Pour $x{=}1$:
$f\big(1\big)=2{\times}1^3-3{\times}1^2-1+1$
$=2-3-1+1=-1$

Ainsi, les deux poitns d'intersection de la droite (T) et de la courbe $\mathscr{C}_f$ ont pour coordonnées :
$\Big(-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\Big)\quad;\quad\big(1\,;-1\big)$

C.6 Déterminons les expressions suivantes :

- $f(4{+}h)=\big(4+h\big){\cdot}\sqrt{4+h}$
- $f(4)=4{\cdot}\sqrt{4}=4{\times}2=8$

On a les manipulations algébriques suivantes :

$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{\big(h+4\big)\sqrt{h+4}-8}{h}$$
$$=\frac{\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}-8\big]\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}\big]^2-8^2}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}=\frac{\big(h+4\big)^2{\cdot}\big(\sqrt{h+4}\big)^2-64}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{\big(h+4\big)^2{\cdot}\big(h+4\big)-64}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}=\frac{\big(h+4\big)^3-64}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}$$

On a le développement :

$$\big(h+4\big)^3=\big(h+4\big)^2{\cdot}\big(h+4\big)=\big(h^2+8{\cdot}h+16\big){\cdot}\big(h+4\big)$$
$$=h^3+8{\cdot}h^2+16{\cdot}h+4{\cdot}h^2+32{\cdot}h+64$$
$$=h^3+12{\cdot}h^2+48{\cdot}h+64$$

Reprenons l'expression du quotient :

$$\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\frac{h^3+12{\cdot}h^2+48{\cdot}h+64-64}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{h^3+12{\cdot}h^2+48{\cdot}h}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}=\frac{h{\cdot}\big(h^2+12{\cdot}h+48\big)}{h{\cdot}\big[\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8\big]}$$
$$=\frac{h^2+12{\cdot}h+48}{\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8}$$

On a les deux limites :
$\lim\limits_{h\mapsto0} h^2+12{\cdot}h+48=48\quad;\quad\lim\limits_{h\mapsto0}\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8=16$

On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 4 :

$$f'(4)=\lim_{h\mapsto0}\frac{f(4{+}h)-f(4)}{h}=\lim_{h\mapsto0}\frac{h^2+12{\cdot}h+48}{\big(h+4\big)\sqrt{h+4}+8}$$
$$=\frac{48}{16}=3$$