

CORRECTIONS

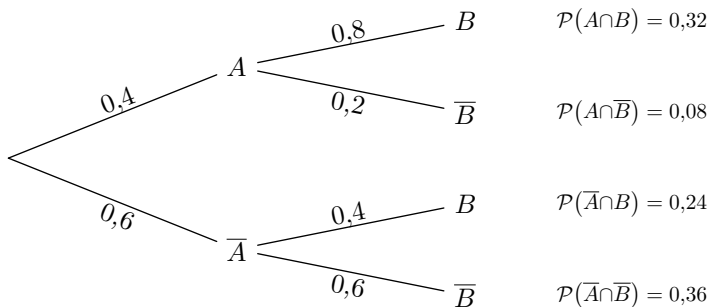
Exercices : Probabilités conditionnelles et indépendance

Correction 1

1. a. $\mathcal{P}_A(B) = 0,7$
b. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,2$
2. a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$
b. $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = \mathcal{P}(\bar{A}) \times \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$

Correction 2

- a. $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - 0,6 = 0,4$
- b. $\mathcal{P}_A(B) = 1 - \mathcal{P}_A(\bar{B}) = 1 - 0,2 = 0,8$
- c. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0,4 \times 0,8 = 0,32$
- d. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = \frac{\mathcal{P}(\bar{A} \cap B)}{\mathcal{P}(\bar{A})} = \frac{0,24}{0,6} = 0,4$
- e. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,4 = 0,6$
- f. $\mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathcal{P}(\bar{A}) \times \mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$



Correction 3

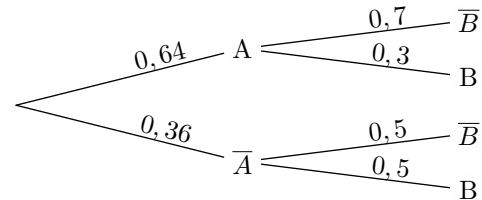
1. • Il y a 720 femmes employées dans cet entreprise. On en déduit la probabilité :
 $\mathcal{P}(F) = \frac{720}{1200} = \frac{3}{5} = 0,6$
• Il y a 618 personnes ayant choisis le train. On a :
 $\mathcal{P}(T) = \frac{618}{1200} = \frac{103}{200} = 0,515$
• La probabilité de choisir un employé n'ayant pas pris le train a pour valeur :
 $\mathcal{P}(\bar{T}) = 1 - \frac{103}{200} = \frac{97}{200} = 0,485$
2. a. D'après le tableau, il y a 468 femmes ayant choisies le train comme moyen de déplacement. On en déduit la probabilité :
 $\mathcal{P}(F \cap T) = \frac{468}{1200} = \frac{39}{100}$
b. On a la formule :
 $\mathcal{P}(F \cup T) = \mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(T) - \mathcal{P}(F \cap T)$
 $= \frac{720}{1200} + \frac{618}{1200} - \frac{468}{1200} = \frac{870}{1200} = \frac{29}{40}$
3. Les personnes n'ayant pas choisi le train sont au nombre de :
 $462 + 120 = 582$
Le nombre de femmes n'ayant pas choisi le train sont au nombre de :
 $196 + 56 = 252$
Ainsi, il y a 252 chances sur 582 de choisir une femme parmi les gens n'ayant pas choisi le train comme mode

de transport ; cette probabilité est :

$$\frac{252}{582} = \frac{42}{97} \approx 0,43298 \approx 0,433$$

Correction 4

1. Voici l'arbre de probabilité associé à cette expérience aléatoire :



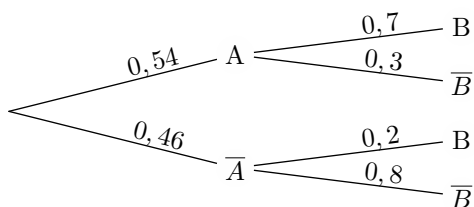
2. a. Par lecture de l'arbre de probabilité, on a :
• $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0,64 \times 0,3 = 0,192$
• $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = \mathcal{P}(\bar{A}) \times \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,36 \times 0,5 = 0,18$
b. A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω . D'après la formule des probabilités totales, on a la formule :
 $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = 0,192 + 0,18 = 0,372$

Correction 5

1.
2. a. On a la formule : $\mathcal{P}(\bar{F}) = 1 - \mathcal{P}(F) = 1 - 0,88 = 0,12$
b. $\mathcal{P}_{\bar{F}}(\bar{E}) = 1 - \mathcal{P}_{\bar{F}}(E) = 1 - 0,8 = 0,2$
c. D'après la formule de la probabilité conditionnelle, on a :
 $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}_F(E) \times \mathcal{P}(F) = 0,92 \times 0,88 = 0,8096$
d. De même que dans la question précédente, on obtient :
 $\mathcal{P}(E \cap \bar{F}) = \mathcal{P}_{\bar{F}}(E) \times \mathcal{P}(\bar{F}) = 0,096$
Les événements F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales, on a :
 $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap F) + \mathcal{P}(E \cap \bar{F}) = 0,8096 + 0,096 = 0,9056$
e. Tout conducteur ayant au moins ses freins ou son éclairage défectueux fait parti de l'ensemble $\bar{E} \cup \bar{F}$. Hors le complémentaire de cet événement $E \cap F$: c'est à dire que les freins et l'éclairage sont tous les deux en bon état. On obtient :
 $\mathcal{P}(\bar{E} \cup \bar{F}) = 1 - \mathcal{P}(E \cap F) = 1 - 0,8096 = 0,1904$

Correction 6

1. Voici l'arbre complété :



2. Par lecture de l'arbre de probabilité, on a les probabilités suivantes :

- a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(B) = 0,54 \times 0,7 = 0,378$
- b. $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = \mathcal{P}(\bar{A}) \cdot \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,46 \times 0,2 = 0,092$
- c. Les deux événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω . La formule de probabilité totale permet d'obtenir la probabilité suivante :
 $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \bar{A}) = 0,378 + 0,092 = 0,47$

- d. Les formules des probabilités conditionnelles permettent d'obtenir les probabilités suivantes :

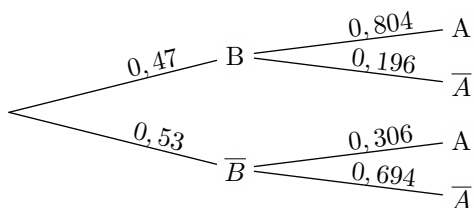
$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{0,378}{0,47} \approx 0,804$$

3. a. $\mathcal{P}(A \cap \bar{B}) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(\bar{B}) = 0,54 \times 0,3 = 0,162$

b. $\mathcal{P}(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - 0,47 = 0,53$

c. $\mathcal{P}_{\bar{B}}(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap \bar{B})}{\mathcal{P}(\bar{B})} = \frac{0,162}{0,53} \approx 0,306$

4. Ainsi, on construit l'arbre de probabilité suivant :

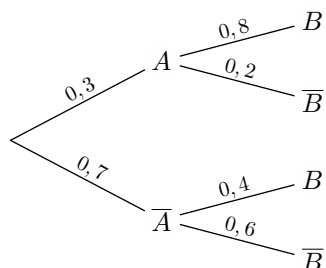


Correction 7

D'après les données de l'énoncé, on déduit :

- $\mathcal{P}_A(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}_A(B) = 1 - 0,80,2$
- $\mathcal{P}_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 1 - 0,6 = 0,4$

Ainsi, on peut compléter l'arbre de probabilité de gauche :



Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(\bar{A} \cap B) \\ &= \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) + \mathcal{P}(\bar{A}) \times \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) \\ &= 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,4 = 0,24 + 0,28 = 0,52 \end{aligned}$$

Par complémentarité, on a :

$$\mathcal{P}(\bar{B}) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - 0,52 = 0,48$$

D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

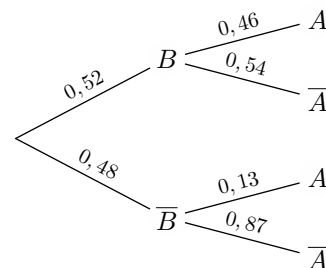
- $\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(B \cap A)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B)}{\mathcal{P}(B)} = \frac{0,3 \times 0,8}{0,52} \approx 0,46$

- $\mathcal{P}_{\bar{B}}(A) = \frac{\mathcal{P}(\bar{B} \cap A)}{\mathcal{P}(\bar{B})} = \frac{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(\bar{B})}{\mathcal{P}(\bar{B})} = \frac{0,3 \times 0,2}{0,48} \approx 0,13$

Par complémentarité, on a :

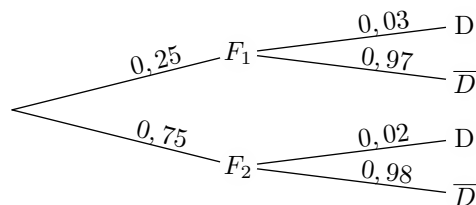
- $\mathcal{P}_B(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}_B(A) = 1 - 0,46 = 0,54$
- $\mathcal{P}_{\bar{B}}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}_{\bar{B}}(A) = 1 - 0,13 = 0,87$

Ainsi, on peut compléter l'arbre de probabilité de droite :



Correction 8

1. Voici l'arbre de probabilité associé à cette épreuve aléatoire :



2. D'après l'arbre de probabilité, on a les deux probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(D \cap F_1) = \mathcal{P}(F_1) \cdot \mathcal{P}_{F_1}(D) = 0,25 \times 0,03 = 0,0075$
- $\mathcal{P}(D \cap F_2) = \mathcal{P}(F_2) \cdot \mathcal{P}_{F_2}(D) = 0,75 \times 0,02 = 0,015$

F_1 et F_2 forment une partition de l'univers Ω . D'après la formule de probabilité totale, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D) &= \mathcal{P}(F_1 \cap D) + \mathcal{P}(F_2 \cap D) \\ &= 0,0075 + 0,015 = 0,0225 \end{aligned}$$

3. La formule des probabilités conditionnelles permet d'obtenir la valeur de la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}_D(F_1) = \frac{\mathcal{P}(D \cap F_1)}{\mathcal{P}(D)} = \frac{0,0075}{0,0225} \approx 0,333$$

Correction 9

1. On a les deux probabilités :

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0,2 \times 0,41 = 0,082$
- $\mathcal{P}(\bar{A} \cap B) = \mathcal{P}(\bar{A}) \times \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,8 \times 0,41 = 0,328$

Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \bar{A}) = 0,082 + 0,328 = 0,41$$

2. D'après la question 1., on a :

- $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = 0,2 \times 0,41 = 0,082$
- $\mathcal{P}(A \cap B) = 0,082$

On remarque l'égalité $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ et on en déduit que les deux événements A et B sont indépendants.

Correction 10

La formule de la probabilité d'une réunion donne la relation suivante :

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)$$

Les évènements A et B étant indépendants :

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(B)$$

$$0,35 = 0,3 + \mathcal{P}(B) - 0,3 \times \mathcal{P}(B)$$

$$0,35 - 0,3 = \mathcal{P}(B) \times (1 - 0,3)$$

$$0,7 \times \mathcal{P}(B) = 0,05$$

$$\mathcal{P}(B) = \frac{0,05}{0,7}$$

$$\mathcal{P}(B) = \frac{5}{70}$$

$$\mathcal{P}(B) = \frac{1}{14}$$

Correction 11

1. Les évènements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \mathcal{P}(B \cap A) + \mathcal{P}(B \cap \bar{A}) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}_A(B) + \mathcal{P}(\bar{A}) \cdot \mathcal{P}_{\bar{A}}(B) \\ &= x \cdot (2x) + (1 - x) \cdot (3x) = 2x^2 + 3x - 3x^2 = -x^2 + 3x \end{aligned}$$

Réolvons l'équation :

$$\mathcal{P}(B) = \frac{29}{100}$$

$$-x^2 + 3x = \frac{29}{100}$$

$$-x^2 + 3x - \frac{29}{100} = 0$$

Le polynôme du membre de gauche est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 3^2 - 4 \times (-1) \times \left(-\frac{29}{100}\right) = 9 - \frac{29}{25} \\ &= \frac{225}{25} - \frac{29}{25} = \frac{196}{25} \end{aligned}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-3 - \frac{14}{5}}{2 \times (-1)} & &= \frac{-3 + \frac{14}{5}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{-\frac{15}{5} - \frac{14}{5}}{2 \times (-1)} & &= \frac{-\frac{15}{5} + \frac{14}{5}}{2 \times (-1)} \\ &= \frac{-\frac{29}{5}}{-2} & &= \frac{-\frac{1}{5}}{-2} \\ &= \frac{29}{10} & &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

On en déduit que la seule valeur possible de x est :

$$x = \frac{1}{10}$$

2. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathcal{P}_B(A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B)}{-x^2 + 3x}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{x \times (2x)}{-x^2 + 3x}$$

D'après le produit en croix :

$$-x^2 + 3x = 5 \times 2x^2$$

$$-x^2 + 3x = 10x^2$$

$$-x^2 + 3x - 10x^2 = 0$$

$$-11x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (-11x + 3) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$\begin{array}{l|l} x = 0 & -11x + 3 = 0 \\ & -11x = -3 \\ & x = \frac{-3}{-11} \\ & x = \frac{3}{11} \end{array}$$

On en déduit que la seule possibilité est $x = \frac{3}{11}$

Correction 12

1. a. $\mathcal{P}_{\bar{A}}(B) = 0,8$

b. $\mathcal{P}_{A \cap B}(C) = 0,5$

c. $\mathcal{P}_{A \cap \bar{B}}(\bar{C}) = 0,4$

2. a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(B) = 0,3 \times 0,1 = 0,03$

b. $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A \cap B) \times \mathcal{P}_{A \cap B}(C) = 0,03 \times 0,5 = 0,015$

c. $\mathcal{P}(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \times \mathcal{P}_{A \cap \bar{B}}(\bar{C}) = \mathcal{P}(A \cap \bar{B}) \times 0,4 = [\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}_A(\bar{B})] \times 0,4 = 0,3 \times 0,9 \times 0,4 = 0,108$

Correction 13

1. Les quatre évènements ci-dessous forment une partition de l'univers :

$$A \cap B \cap C ; A \cap \bar{B} \cap C ; \bar{A} \cap B \cap C ; \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$$

D'après la formule de probabilité totale :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C) &= \mathcal{P}(A \cap B \cap C) + \mathcal{P}(A \cap \bar{B} \cap C) \\ &\quad + \mathcal{P}(\bar{A} \cap B \cap C) + \mathcal{P}(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \\ &= 0,3 \times 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0,6 \times 0,9 + 0,7 \times 0,2 \times 0,4 + 0,7 \times 0,8 \times 0,2 \\ &= 0,024 + 0,09 + 0,252 + 0,014 = 0,38 \end{aligned}$$

2. • Déterminons la probabilité de l'évènement $A \cap C$.

Les évènements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cap C) &= \mathcal{P}[(A \cap C) \cap B] + \mathcal{P}[(A \cap C) \cap \bar{B}] \\ &= 0,3 \times 0,4 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 \times 0,5 = 0,024 + 0,09 = 0,114 \end{aligned}$$

- On remarque que :

$$\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(C) = 0,3 \times 0,38 = 0,114$$

De l'égalité $\mathcal{P}(A \cap C) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(C)$, on en déduit que les deux évènements A et C sont indépendants

Correction 14

1. Les quatre évènements $N_1 \cap N_2$, $N_1 \cap R_2$, $R_1 \cap N_2$ et $R_1 \cap R_2$ forment une partition de l'univers. D'après la

formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(N_3) &= \mathcal{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathcal{P}(N_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &\quad + \mathcal{P}(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathcal{P}(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{36}{125} + \frac{6}{125} + \frac{4}{125} + \frac{24}{125} = \frac{70}{125}\end{aligned}$$

2. • Les événements N_2 et R_2 forment une partition de l'univers.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(N_1 \cap N_3) &= \mathcal{P}(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + \mathcal{P}(N_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{36}{125} + \frac{6}{125} = \frac{42}{125}\end{aligned}$$

- On remarque :

$$\mathcal{P}(N_1) \times \mathcal{P}(N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{70}{125} = \frac{42}{125} = \mathcal{P}(N_1 \cap N_3)$$

On en déduit que les deux événements N_1 et N_3 sont indépendants.