CORRECTIONS

Exercices : Dérivation en un point

Correction 1

1.
- $f(0{,}01) = \dfrac{0{,}01+2}{0{,}01^2+3} = \dfrac{2{,}01}{3+0{,}0001} = \dfrac{2{,}01}{3{,}0001}$
- $g(0{,}0001) = \dfrac{2\times0{,}0001-1}{\sqrt{0{,}0001}} = \dfrac{0{,}0002-1}{0{,}01} = \dfrac{-0{,}9998}{0{,}01}$
- $h(0{,}01) = \dfrac{2\times0{,}01^2+0{,}01}{5\times0{,}01} = \dfrac{2\times0{,}0001+0{,}01}{0{,}05}$
$= \dfrac{0{,}0002+0{,}01}{0{,}05} = \dfrac{0{,}0102}{0{,}05}$

2. Voici le tableau complété par le tableau des valeurs arrondies au dix-millième près :

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
1	0,75	1	0,6
0,1	0,6977		0,24
0,01	0,6700	$-9{,}8$	0,204
0,001	0,6667		0,2004
0,0001	0,6666	$-99{,}98$	0,2000
0,00001			
0,000001		$-999{,}998$	

3. On a les conjectures suivantes :
- $\lim\limits_{x\mapsto0} f(x) = \dfrac{2}{3}$
- $\lim\limits_{x\mapsto0} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto0} h(x) = \dfrac{1}{5}$

Correction 2

On a les transformations algébriques suivantes :
$f(1+h) = (1+h)^2 - 3\cdot(1+h) + 2$
$= 1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 2 = h^2 - h$

Correction 3

1. a. $f(1+\pi) = \big(1+\pi\big)^2 + \big(1+\pi\big) + 1$
$= \big(1 + 2\cdot\pi + \pi^2\big) + \pi + 2 = \pi^2 + 3\cdot\pi + 3$

b. $f(2+h) = \big(2+h\big)^2 + \big(2+h\big) + 1$
$= \big(4 + 4\cdot h + h^2\big) + h + 3 = h^2 + 5\cdot h + 7$

2. $g(1+h) - g(1) = \dfrac{(1+h)+1}{(1+h)^2+1} - \dfrac{1+1}{1^2+1}$

$= \dfrac{h+2}{1+2\cdot h+h^2+1} - \dfrac{2}{2} = \dfrac{h+2}{h^2+2\cdot h+2} - 1$

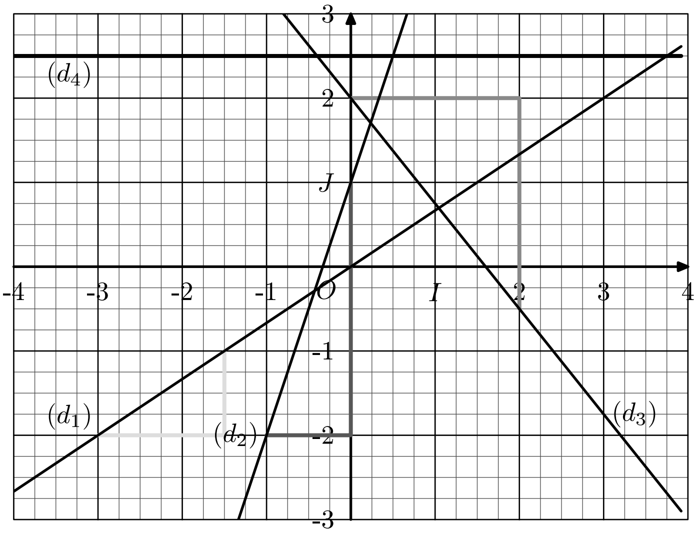
$= \dfrac{h+2}{h^2+2\cdot h+2} - \dfrac{1\cdot\big(h^2+2\cdot h+2\big)}{h^2+2\cdot h+2}$

$= \dfrac{h+2-\big(h^2+2\cdot h+2\big)}{h^2+2\cdot h+2} = \dfrac{h+2-h^2-2\cdot h-2}{h^2+2\cdot h+2}$

$= \dfrac{-h^2-h}{h^2+2\cdot h+2} = \dfrac{-h\cdot\big(h+1\big)}{h^2+2\cdot h+2}$

Correction 4

On a fait ressortir en couleurs les triangles rectangles permettant de calculer facilement le coefficient directeur de chacune des droites :



a. Calcul du coefficient directeur de (d_1) :

La droite (d_1) passe par les points $(-3\,;-2)$ et $(-1{,}5\,;-1)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$c_1 = \dfrac{-1-(-2)}{-1{,}5-(-3)} = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}$

b. Calcul du coefficient directeur de (d_2) :

La droite (d_2) passe par les points $(-1\,;-2)$ et $(0\,;1)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$c_2 = \dfrac{1-(-2)}{0-(-1)} = \dfrac{3}{1} = 3$

c. Calcul du coefficient directeur de (d_3) :

La droite (d_3) passe par les points $(0\,;2)$ et $(2\,;-0{,}5)$. Le coefficient directeur de cette droite est :

$c_3 = \dfrac{-0{,}5-2}{2-0} = \dfrac{-2{,}5}{2} = -\dfrac{5}{4}$

d. Calcul du coefficient directeur de (d_4) :

La droite (d_4) est parallèle à l'axe des abscisses : son coefficient directeur est nul.

$c_4 = 0$

Correction 5

On a les transformations algébriques suivantes :
$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$= \dfrac{\big[3\cdot(2+h)^2 - 2\cdot(2+h)\big] - (3\times2^2 - 2\times2)}{h}$

$= \dfrac{\big[3\cdot(4+4\cdot h+h^2) - 4 - 2h\big] - (3\times4-4)}{h}$

$= \dfrac{12 + 12\cdot h + 3\cdot h^2 - 4 - 2\cdot h - 8}{h} = \dfrac{3\cdot h^2 + 10\cdot h}{h}$

$= \dfrac{h\cdot(3\cdot h+10)}{h} = 3\cdot h + 10$

On a la limite : $\lim\limits_{h\mapsto0} 3\cdot h + 10 = 10$

On en déduit la valeur du nombre dérivée de la fonction f en 2 :

$f'(2)=10$

Correction 6

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\frac{\sqrt{2{\cdot}(2+h)+5}-\sqrt{2{\times}2+5}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{4{+}2{\cdot}h{+}5}-\sqrt{4{+}5}}{h}=\frac{\sqrt{2{\cdot}h{+}9}-\sqrt{9}}{h}=\frac{\sqrt{2{\cdot}h{+}9}-3}{h}$$

Le facteur $\sqrt{2{\cdot}h{+}9}{+}3$ étant non-nul :

$$=\frac{\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}-3\big){\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}=\frac{\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}\big)^2-3^2}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}$$
$$=\frac{\big(2{\cdot}h+9\big)-9}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}=\frac{2{\cdot}h}{h{\cdot}\big(\sqrt{2{\cdot}h+9}+3\big)}=\frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h{+}9}+3}$$

b. Le nombre dérivée de la fonction f en $x{=}2$ est défini par la limite :

$$f'(2)=\lim_{x\mapsto 0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}$$

D'après la question précédente, on a la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(2{+}h)-f(2)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2}{\sqrt{2{\cdot}h+9}+3}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}$$
$$=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ainsi, on a : $\quad f'(2)=\dfrac{1}{3}$

2. D'après la valeur du nombre dérivée pour $x{=}2$ obtenue à la question précédente, la tangente (T) a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, la droite (T) admet une équation réduite de la forme :

$$y=\frac{1}{3}{\cdot}x+b \qquad \text{où } b{\in}\mathbb{R}$$

Le point de contact de coordonnées $(2\,;3)$ est un point de $\mathscr{C}_f$ et de (T). Ses coordonnées vérifient l'équation réduite de (T).

$$3=\frac{1}{3}{\times}2+b$$
$$3-\frac{2}{3}=b$$
$$b=\frac{7}{3}$$

Ainsi, (T) admet pour équation réduite :

$$y=\frac{1}{3}{\cdot}x+\frac{7}{3}$$

Correction 7

1. Pour qu'une racine carrée soit définie, il est nécessaire que l'expression sous son radical soit positif ou nul. Pour déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, résolvons l'inéquation suivante :

$$5-2{\cdot}x\geqslant 0$$
$$-2{\cdot}x\geqslant -5$$
$$x\leqslant\frac{5}{2}$$

On en déduit que : $\quad \mathcal{D}_f=\Big]-\infty\,;\frac{5}{2}\Big]$

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(-2{+}h)-f(-2)}{h}=\frac{\sqrt{5-2(-2+h)}-\sqrt{5-2{\times}(-2)}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{5+4-2{\cdot}h}-\sqrt{5+4}}{h}=\frac{\sqrt{9-2{\cdot}h}-\sqrt{9}}{h}$$
$$=\frac{\sqrt{9-2{\cdot}h}-3}{h}$$

Le facteur $\sqrt{9{-}2{\cdot}h}{+}3$ est non-nul :

$$=\frac{\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}-3\big)\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}+3\big)}{h{\cdot}\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}+3\big)}$$
$$=\frac{\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}\big)^2-3^2}{h{\cdot}\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}+3\big)}=\frac{9-2{\cdot}h-9}{h{\cdot}\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}+3\big)}$$
$$=\frac{-2{\cdot}h}{h{\cdot}\big(\sqrt{9-2{\cdot}h}+3\big)}=\frac{-2}{\sqrt{9-2{\cdot}h}+3}$$

b. On en déduit la limite du nombre dérivée de la fonction f en -2 :

$$f'(-2)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-2{+}h)-f(-2)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{-2}{\sqrt{9-2{\cdot}h}+3}$$
$$=\frac{-2}{3+3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

3. L'image de -2 par la fonction f a pour valeur :

$$f(-2)=\sqrt{5-2{\times}(-2)}=\sqrt{9}=3$$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2 admet pour équation :

$$y=f'(-2){\cdot}\big[x-(-2)\big]+f(-2)$$
$$=-\frac{1}{3}{\cdot}(x+2)+3=-\frac{1}{3}{\cdot}x-\frac{2}{3}+3=-\frac{1}{3}{\cdot}x+\frac{7}{3}$$

Correction 8

1.
- $$f(1{+}h)=\frac{3{\cdot}(1+h)^2-2}{(1+h)^2+1}=\frac{3{\cdot}(h^2+2{\cdot}h+1)-2}{(h^2+2{\cdot}h+1)+1}$$
$$=\frac{3{\cdot}h^2+6{\cdot}h+3-2}{(h^2+2{\cdot}h+1)+1}=\frac{3{\cdot}h^2+6{\cdot}h+1}{h^2+2{\cdot}h+2}$$
- $$f(1)=\frac{3{\times}1^2-2}{1^2+1}=\frac{3-2}{1+1}=\frac{1}{2}$$
- $$\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\frac{\dfrac{3{\cdot}h^2+6{\cdot}h+1}{h^2+2{\cdot}h+2}-\dfrac{1}{2}}{h}$$
$$=\frac{\dfrac{\big(3{\cdot}h^2+6{\cdot}h+1\big){\cdot}2}{\big(h^2+2{\cdot}h+2\big){\cdot}2}-\dfrac{1{\cdot}\big(h^2+2{\cdot}h+2\big)}{2{\cdot}\big(h^2+2{\cdot}h+2\big)}}{h}$$
$$=\frac{6{\cdot}h^2+12{\cdot}h+2-h^2-2{\cdot}h-2}{2{\cdot}\big(h^2+2{\cdot}h+2\big)}{\times}\frac{1}{h}$$
$$=\frac{5{\cdot}h^2+10{\cdot}h}{2{\cdot}h{\cdot}\big(h^2+2{\cdot}h+2\big)}=\frac{h{\cdot}\big(5{\cdot}h+10\big)}{h{\cdot}\big(2{\cdot}h^2+4{\cdot}h+4\big)}$$
$$=\frac{5{\cdot}h+10}{2{\cdot}h^2+4{\cdot}h+4}$$

On en déduit la valeur de la limite :

$$f'(1)=\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1{+}h)-f(1)}{h}=\lim_{h\mapsto 0}\frac{5{\cdot}h+10}{2{\cdot}h^2+4{\cdot}h+4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

2. a. De la question précédente, on en déduit que le coefficient directeur de la tangente (T) a pour valeur $\dfrac{5}{2}$.

Son équation réduite est de la forme :

$$y = \frac{5}{2}\cdot x + b \qquad \text{où } b\in\mathbb{R}$$

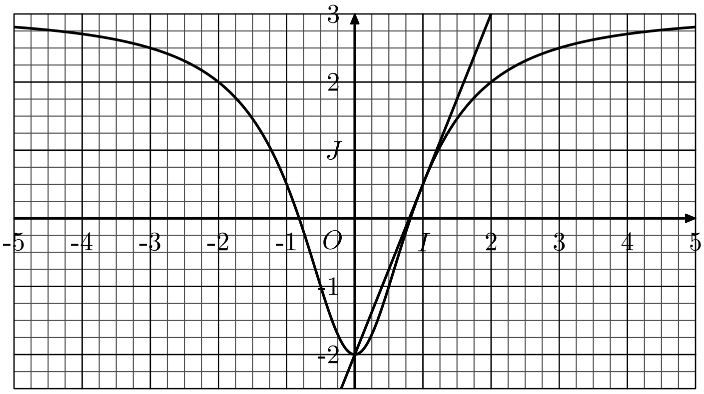
Le point de coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$ étant le point de contact, il appartient à $\mathscr{C}_f$ et à (T).

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{2}\times 1 + b$$
$$b = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}$$
$$b = -2$$

On en déduit l'équation réduite de (T) :

$$y = \frac{5}{2}\cdot x - 2$$

b. Voici la représentation de la tangente (T) :



3. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{5}{2}x - 2$$
$$\frac{3\cdot x^2-2}{x^2+1} - \frac{5\cdot x-4}{2} = 0$$
$$\frac{2\cdot\left(3\cdot x^2-2\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} - \frac{\left(5\cdot x-4\right)\left(x^2+1\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{6\cdot x^2-4-\left(5\cdot x^3+5\cdot x-4\cdot x^2-4\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{6\cdot x^2-4-5\cdot x^3-5x+4\cdot x^2+4}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x^3+10\cdot x^2-5\cdot x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x\cdot\left(x^2-2\cdot x+1\right)}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$
$$\frac{-5\cdot x\cdot\left(x-1\right)^2}{2\cdot\left(x^2+1\right)} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul ; on en déduit les solutions de l'équation précédente :
$\mathcal{S} = \left\{0\,;1\right\}$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente (T) s'intercepte en deux points de coordonnées :

$\left(0\,;-2\right)$; $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$

Correction 9

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{f(1+h)}{h} = \frac{\left[(1+h)^2-4\cdot(1+h)+3\right]\sqrt{2\cdot(1+h)-2}}{h}$$
$$= \frac{(1+2\cdot h+h^2-4-4\cdot h+3)\cdot\sqrt{2+2\cdot h-2}}{h}$$
$$= \frac{(h^2-2\cdot h)\cdot\sqrt{2\cdot h}}{h} = (h-2)\cdot\sqrt{2\cdot h}$$

2. Le nombre dérivée de la fonction f en 1 est déterminé par la valeur de la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-0}{h}$$
$$= \lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}(h-2)\cdot\sqrt{2\cdot h} = 0$$

Ainsi, la fonction admet 0 pour nombre dérivée en 1 : la tangente à sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Correction 10

1. a. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$f(4+h)-f(4) = \left[\frac{1}{2}\cdot(4+h)^2-2(4+h)+1\right]-\left(\frac{1}{2}\times 4^2-2\times 4+1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(16+8h+h^2)-8-2h+1-\left(\frac{1}{2}\times 16-8+1\right)$$
$$= 8+4h+\frac{1}{2}h^2-8-2h+1-\left(8-8+1\right)$$
$$= \frac{1}{2}h^2+2h+1-1 = \frac{1}{2}h^2+2h$$

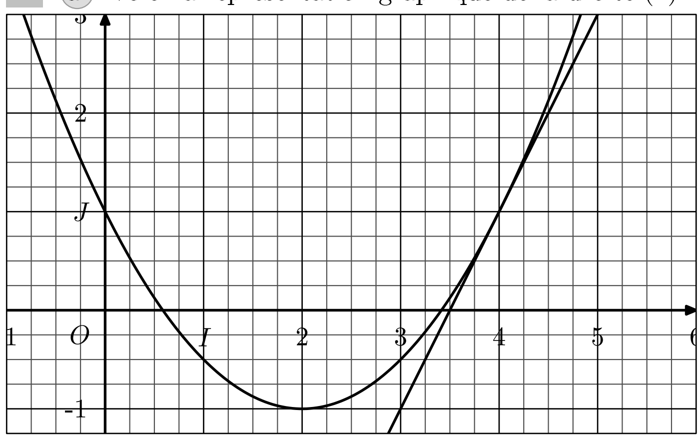
b. Ainsi, le quotient a pour valeur :

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{-\frac{1}{2}h^2-4h}{h} = \frac{h\cdot\left(\frac{1}{2}h+2\right)}{h} = \frac{1}{2}h+2$$

On en déduit que lorsque h tend vers 0, cette expression tend vers 2. On obtient la limite :

$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\mapsto 0}\frac{1}{2}h+2 = 2$$

2. a. Voici la représentation graphique de la droite (d) :



On remarque que cette droite est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.

b. L'image du nombre 4 par la fonction f a pour valeur :

$$f(4) = \frac{1}{2}\times 4^2-2\times 4+1 = \frac{1}{2}\times 16-8+1$$
$$= 8-8+1 = 1$$

Notons A le point de coordonnées $(4\,;1)$

- La droite (d) a pour coefficient directeur 2 qui est aussi le nombre dérivée de la fonction f pour $x=4$. Ainsi, la droite (d) est parallèle à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
- La droite (d) passe par le point A :
$2x_A-7 = 2\times 4-7 = 8-7 = 1 = y_A$

On en déduit que la droite (d) est confondu avec la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Correction 11

- La réponse a. est fausse :
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses. On en déduit que le nombre dérivé de la fonction f en 0 vaut 0

- La réponse b. est fausse :
Un nombre dérivée de 0 en -1 entrainerai une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse -1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.
Or, on voit que la courbe $\mathscr{C}_f$ n'admet pas une telle tangente au point d'abscisse -1.

- La réponse correcte est c. :
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 est une droite passant par les points $A(-4\,;4)$ et $B(-2\,;2)$.
Le coefficient directeur de cette tangente a pour valeur :
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-4}{(-2)-(-4)}=\frac{-2}{-2+4}=\frac{-2}{2}=-1$$

- La réponse d. est fausse :
On voit que pour $x=-3$, la fonction f est décroissante. Ainsi, le nombre dérivé de la fonction f en -3 est négatif et ne peut donc être égal à 3.