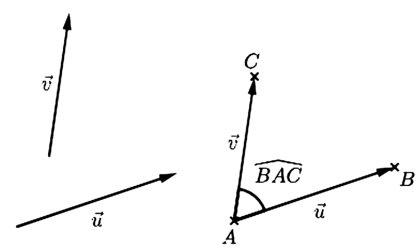
Produit scalaire

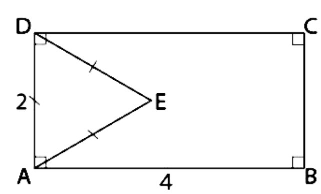
I Définition

Rappel 1
Soient 2 points A et B et un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$** notée $|| \overrightarrow{u} ||$ est la **distance AB

Définition 1
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.
*Le **produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$**, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est défini par :*
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si un des vecteurs est nul
- $\boldsymbol{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = || \overrightarrow{u} || \times || \overrightarrow{v} || \times \cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})}$ sinon.



Remarque
1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ se lit **"$\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$"**
2) Soient A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = || \overrightarrow{AB} || \times || \overrightarrow{AC} || \times \cos(\widehat{BAC})}$



Exemple 1
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 4cm$ et $AD = 2cm$.
AED est un triangle équilatéral.
1) Calculer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}$
2) Calculer $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AE}$

II Propriétés

Propriété 1
Pour tout vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, pour tout réel k :
1) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (propriété de symétrie du produit scalaire)
2) $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
3) $\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = (k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ (propriétés de bilinéarité du produit scalaire)
4)$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
5)$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
6)$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$ (identités remarquables)

Démonstration

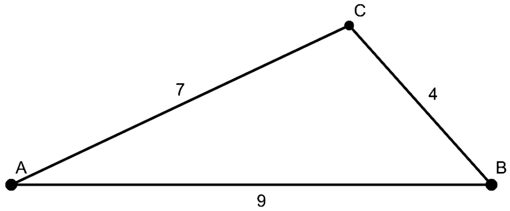
III Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Propriété 2
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on a :
1) $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = || \overrightarrow{u} ||^2$
2) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(|| \overrightarrow{u} ||^2 + || \overrightarrow{v} ||^2 - || \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} ||^2)$
3) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(|| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} ||^2 - || \overrightarrow{u} ||^2 - || \overrightarrow{v} ||^2)$

Démonstration

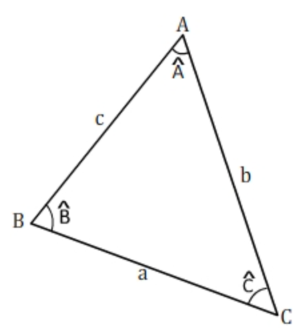
Exemple 2
Soit ABC le triangle ci-contre.



Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

2) Théorème d'Al-Kashi

Théorème 1
Dans un triangle ABC, avec les notations de la figure
on a $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$



Démonstration

Exemple 3
On considère la figure ci-contre, calculer l'angle $\widehat{BAC}$ à $0,01°$ près.