Exercices produit scalaire - 1eres spé

C.1 Au cours de l'exercice, nous aurons besoin des exercices suivants :

- Dans le triangle ABC rectangle en B.

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2}$$
$$AB = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$AB = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$AB = \sqrt{2}$$

- Dans le triangle ADE rectangle en D.

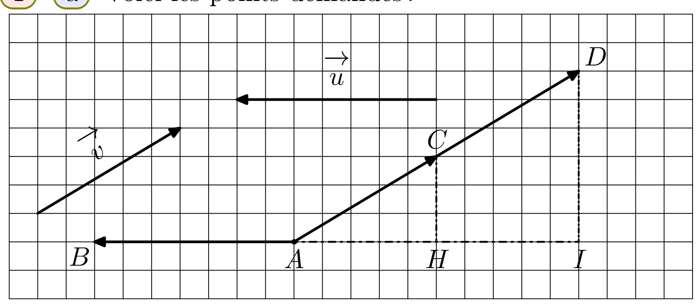
$$\cos\widehat{DAE} = \frac{AD}{AE}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{AD}{4}$$
$$AD = 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$AD = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$AD = 2\cdot\sqrt{3}$$

(a) Le point D est le projeté orthogonal du point E sur la droite (AD).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens.
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = AB\times AD = \sqrt{2}\times\left(2\cdot\sqrt{3}\right)$$
$$= 2\cdot\sqrt{2\times3} = 2\cdot\sqrt{6}$$

(b) Le projeté orthogonal du point C sur la droite (AD) est le point B.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ étant colinéaires et de même sens, on a :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$$
D'après la question précédente :
$$= 2\cdot\sqrt{6}$$

(c) Le point D est le projeté orthogonal du E sur la droite est le point D.
Le vecteur $\overrightarrow{DD}$ étant le vecteur nul, on a :
$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{0} = 0$$

C.2
(1) (a) Voici les points demandés :



(b) Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant de sens opposés, on a :
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} = -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AH}\right\|$$
$$= -AB\times AH = -7\times5 = -35$$

(2) (b) Plaçons le point D tel que : $2\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$
Notons I le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont de sens opposés. On a :
$$\overrightarrow{u}\cdot\left(2\cdot\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$$
$$= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = -7\times10 = -70$$

(3) On remarque que : $\overrightarrow{u}\cdot\left(2\cdot\overrightarrow{v}\right) = 2\times\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\right)$

C.3
(1)
- Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$BC^2 = 15^2 + 8^2$$
$$BC^2 = 225 + 64$$
$$BC^2 = 289$$
$$BC = \sqrt{289}$$
$$BC = 17\,m$$

- Dans le triangle ABD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = DA^2 + DB^2$$
$$15^2 = 9^2 + DB^2$$
$$225 = 81 + DB^2$$
$$DB^2 = 225 - 81$$
$$DB^2 = 144$$
$$DB = \sqrt{144}$$
$$DB = 12\,m$$

(2) (a) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = BA\times BA = 15^2 = 225$

(b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BD} = -\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}\right)$
$$= -\left(\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}\right) = -BD\times BD = -12^2 = -144$$

(c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

(d) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}$
$$= BD\times BD = 12^2 = 144$$

(e) $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB} = -\left(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$
$$= -AD\times AD = -9^2 = -81$$

(f) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = \left(-\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CA} = -\left(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}\right)$
$$= -\left(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}\right) = -CA\times CA = -8\times8 = -64$$

C.4
(1) Dans le triangle BHC rectangle en H et d'après le théorème de Pythagore, on a la propriété :

$AC^2 = BH^2 + HC^2$
$13^2 = 12^2 + HC^2$
$169 = 144 + HC^2$
$HC^2 = 169 - 144$
$HC^2 = 25$
$HC = \sqrt{25}$
$HC = 5$

La relation de Chasles permet d'écrire les décompositions :

- $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}$

Le produit scalaire peut s'exprimer par :
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HC}\right)$
$= \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$
$= 12^2 + 0 + 0 + \left(-9\times5\right) = 144 - 45 = 99$

2. Ce produit scalaire s'exprime aussi par :
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA\times BC\times \cos\widehat{ABC} = 15\times13\times \cos\widehat{ABC}$

De l'égalité de ces deux expressions du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$:
$99 = 15\times13\times \cos\widehat{ABC}$
$\cos\widehat{ABC} = \dfrac{99}{15\times13}$
$\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\dfrac{99}{15\times13}\right)$
$\widehat{ABC} \approx 59{,}489$
$\widehat{ABC} \approx 59{,}5$

C.5

1. La relation de Chasles permet d'écrire :
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID}$

Les propriétés algébriques du produit en croix permettent d'écrire :
$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \left(\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}\right)\left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{ID}\right)$
$= \overrightarrow{OJ}\cdot\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{ID}$
$= -OJ\times OI + 0 + 0 + JC\times ID$
$= -4^2 + 2\times2 = -16 + 4 = -12$

2. Dans le triangle OJC rectangle en J et d'après le théorème de Pythagore, on a :
$OC^2 = OJ^2 + JC^2$
$OC^2 = 4^2 + 2^2$
$OC^2 = 16 + 4$
$OC^2 = 20$
$OC = \sqrt{20}$
$OC = 2\sqrt{5}$

3. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ est aussi défini par :
$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = OC\times OD\times \cos\widehat{COD}$

On en déduit :
$-12 = 2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times \cos\widehat{COD}$
$-12 = 20\times \cos\widehat{COD}$
$\dfrac{-12}{20} = \cos\widehat{COD}$
$\cos\widehat{COD} = -\dfrac{3}{5}$
$\widehat{COD} = \cos^{-1}\left(-\dfrac{3}{5}\right)$
$\widehat{COD} \approx 126{,}87$
$\widehat{COD} \approx 127^o$

C.6

1.
- Dans le triangle ABC rectangle en B.

⇨ $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC}$
$\cos\left(45^o\right) = \dfrac{AB}{2}$
$AB = 2\cdot \cos\left(45^o\right)$
$AB = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$AB = \sqrt{2}$

⇨ $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$
$\cos\left(45^o\right) = \dfrac{BC}{2}$
$BC = 2\cdot \cos\left(45^o\right)$
$BC = 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$BC = \sqrt{2}$

- Dans le triangle ADE rectangle en D.

⇨ $\cos\widehat{DAE} = \dfrac{AD}{AE}$
$\cos\left(30^o\right) = \dfrac{AD}{4}$
$AD = 4\cdot \cos\left(30^o\right)$
$AD = 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$AD = 2\cdot\sqrt{3}$

⇨ $\sin\widehat{DAE} = \dfrac{DE}{AE}$
$\sin\left(30^o\right) = \dfrac{DE}{4}$
$DE = 4\cdot \sin\left(30^o\right)$
$DE = 4\times\dfrac{1}{2}$
$DE = 2$

2. La distributivité du produit scalaire sur l'addition vectorielle donne :
$\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
$= \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}$

Déterminons la valeur de chacun de ces produits scalaires :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaires et de même sens :
  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AD \times AB$
- Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant orthogonaux :
  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant orthogonaux :
  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$
- Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de sens opposé :
  $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BC} = -DE \times BC$

On en déduit :
$\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = AD \times AB - DE \times BC$

3. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$
$= AD \times AB - DE \times BC = 2 \cdot \sqrt{3} \times \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2}$
$= 2 \cdot \sqrt{6} - 2 \cdot \sqrt{2}$