Second degré - Etude algébrique

I Equation du second degré

Définition 1
Une équation s'écrivant sous la forme $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ *avec* $a \neq 0$ *s'appelle une* ***équation du second degré***
On appelle ***racine du polynôme*** *une solution de cette équation*

Exemple 1
1) .... est une équation du second degré
2) $2x^2-5x+3=0$ est ....
1 est une .... du polynôme ....
car ....

Définition 2
On pose $\boldsymbol{\Delta = b^2-4ac}$ *c'est* ***le discriminant*** *du polynôme* ax^2+bx+c

Exemple 2
Dans l'exemple 1 question 2), $a=$ ...., $b=$ .... et $c=$ ....
Donc $\Delta=$ ....
$\Delta=$ ....

Propriété 1
Soit Δ le discriminant du polynôme ax^2+bx+c
- **Si** $\boldsymbol{\Delta>0}$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ **a deux solutions** : $\boldsymbol{x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ **et** $\boldsymbol{x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$
- **Si** $\boldsymbol{\Delta=0}$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ **a une unique solution** : $\boldsymbol{x_0=\dfrac{-b}{2a}}$
- **Si** $\boldsymbol{\Delta<0}$: l'équation $ax^2+bx+c=0$ **n'a pas de solution dans** $\mathbb{R}$

Démonstration

Exemple 3
Résoudre les équations suivantes :
1) $3x^2 - 2x + 4 = 0$. . $a =$ ...., $b =$ .... et $c =$ ....
Donc $\Delta =$ ....
Donc

2) $-\frac{1}{2}x^2 + 6x + 14 = 0$. . $a =$ ...., $b =$ .... et $c =$ ....
Donc $\Delta =$ ....
Donc

3) $2x^2 - 8x + 8 = 0$. . $a =$ ...., $b =$ .... et $c =$ ....
Donc $\Delta =$ ....
Donc

II Somme et produit des racines

Propriété 2
Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines, alors :
la somme S de ces racines vaut : $\boldsymbol{S = -\frac{b}{a}}$ et le produit P de ces racines vaut $\boldsymbol{P = \frac{c}{a}}$

Démonstration

Exemple 4
Soit l'équation $2x^2 + 4x - 6 = 0$
Repérer une racine évidente de cette équation, puis terminer la résolution de cette équation.
....
....
....
....
....

III Factorisation

Propriété 3
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$
- Si $\boldsymbol{\Delta > 0}$ alors $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ où x_1 et x_2 sont les racines de f
- Si $\boldsymbol{\Delta = 0}$ alors $\boldsymbol{f(x) = a(x - x_0)^2}$ où x_0 est la racine double de f

Remarque
Si $\boldsymbol{\Delta < 0}$ f n'a pas de forme factorisée

Exemple 5
Factoriser les trinômes suivants :
1) $4x^2 + 8x + 4$
....
....
2) $3x^2 - 5x - 2$
....
....

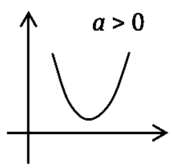
IV Signe

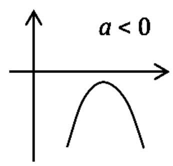
Rappel 1
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:
*- **Si $a > 0$** la parabole représentant f sera **tournée vers le haut***
*- **Si $a < 0$** la parabole représentant f sera **tournée vers le bas***

Propriété 4
Signe d'une fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta < 0$:

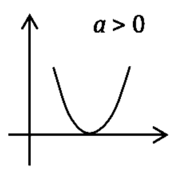
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

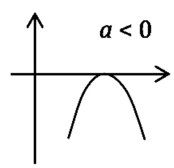




- Si $\Delta = 0$:

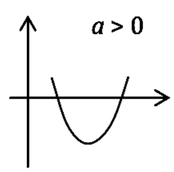
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

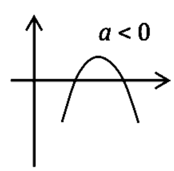




- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a





Exemple 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2x^2 - 5x + 10 \geq 12 - 2x$