CORRECTIONS

Exercices : Second degré - Partie 2

Correction 1

a. Le discriminant du polynome $x^2+2x-15$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-15) = 64$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant est strictement positif ; cette équation admet les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = 3$$

L'ensemble des solutions est : $S=\{-5\,;3\}$

b. Le discriminant du polynome $3x^2-5x+7$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times7 = 25 - 84 = -59$

Le discriminant étant strictement négatif, l'équation $3x^2-5x+7=0$ n'admet aucune solution.
$S = \varnothing$

c. Le discriminant du polynome $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4\times3\times48 = 576 - 576 = 0$

Le discriminant étant nul, l'équation $3x^2-24x+48=0$ admet une unique solution.
$x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{2\times3} = 4$
Ainsi, on a : $S=\{4\}$

d. Le discriminant du polynome $-4\cdot x^2-x+3$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times(-4)\times3 = 1 + 48 = 49$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, l'équation $-4\cdot x^2-x+3=0$ admet les solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2\times(-4)} = \frac{1-7}{-8} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2\times(-4)} = \frac{1+7}{-8} = \frac{8}{-8} = -1$$

Cette équation admet pour ensemble de solutions :
$S=\left\{-1\ ;\ \dfrac{3}{4}\right\}$

Correction 2

a. Le discriminant du polynôme du second degré $3x^2-5x+6$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times6 = 25 - 72 = -47 < 0$

Le discriminant étant négatif, cette équation n'admet aucune solution :
$S = \varnothing$

b. Déterminons le discriminant du trinôme $3x^2-24x+48$ est :
$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4\times3\times48 = 0$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant nul, cette équation admet une unique solution :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-24}{6} = 4$

L'ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{4\}$

c. On a les transformations algébriques :

$$\begin{aligned}
x(x-2)(x+1) &= (x-2)(-7-3x)\\
x(x-2)(x+1)-(x-2)(-7-3x) &= 0\\
(x-2)\big[x(x+1)-(-7-3x)\big] &= 0\\
(x-2)\big(x^2+x+7+3x\big) &= 0\\
(x-2)\big(x^2+4x+7\big) &= 0
\end{aligned}$$

Cherchons les racines du second facteur ; le discriminant de x^2+4x+7 a pour valeur :
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4\times1\times7 = 16 - 28 = -12 < 0$
Ce discriminant est négatif : ce polynôme n'admet aucune racine.

Pour que le produit $(x-2)(x^2+4x+7)$ s'annule, il est nécessaire qu'un de ses facteurs s'annule ; seul le premier facteur peut s'annuler pour $x=2$.

L'ensemble des solutions est : $S=\{2\}$

Correction 3

1. On considère un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement positif :

a. Calculer la somme des racines :

$$x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)+\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

b. Calculons le produit des racines de ce polynôme :

$$\begin{aligned}
x_1\cdot x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2} = \frac{-\left(\sqrt{\Delta}+b\right)\left(\sqrt{\Delta}-b\right)}{4a^2}\\
&= \frac{-\left(\Delta-b^2\right)}{4a^2} = \frac{-\left[(b^2-4ac)-b^2\right]}{4a^2} = \frac{-(-4ac)}{4a^2}\\
&= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

2. a. On remarque facilement que 2 est une racine de ce polynôme :
$2x^2+4x-16 = x\times2^2+4\times2-16 = 8+8-16 = 0$

- Déterminons la seconde racine en utilisant la somme des racines :

$$\begin{aligned}
x_1+x_2 &= -\frac{b}{a}\\
2+x_2 &= -\frac{4}{2}\\
x_2 &= -2-2\\
x_2 &= -4
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $2(x-2)(x+4)$ est la forme factorisée de ce polynôme.

- Il est également possible de déterminer la seconde racine en utilisant la valeur du produit des racines:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$
$$2 \cdot x_2 = \frac{-16}{2}$$
$$x_2 = \frac{-8}{2}$$
$$x_2 = -4$$

Par cette méthode, on trouve également la même valeur pour cette seconde racine.

b. En lien avec la question 1. et en notant x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme, on a les relations suivantes sur les coefficients de ce polynôme:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = -\dfrac{b}{a} \\ -10 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} -3a = b \\ -10a = c \end{cases}$$

En choisissant 1 pour valeur de a, le polynôme recherché est:

$$x^2 - 3x - 10$$

Facultatif:

Ce polynôme du second degré a pour valeur:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times1\times(-10) = 9 + 40 = 49$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3)-7}{2\times1} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-3)+7}{2\times1} = \frac{10}{2} = 5$$

Les deux racines sont: -2 ; 5

Correction 4

1. Donnons la forme développée et de l'expression suivante:

$$(x+2)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$
$$= (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x) + (2a \cdot x^2 + 2b \cdot x + 2c)$$
$$= a \cdot x^3 + (b+2a) \cdot x^2 + (c+2b) \cdot x + 2c$$

En identifiant terme à terme la forme réduite obtenue précédemment et l'expression de P, on remarque que les valeurs de a, b, c doivent vérifier la relation suivante:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b + 2a = 1 \\ c + 2b = -8 \\ 2c = 4 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient:

$a = 3$; $b = -5$; $c = 2$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante:

$$P(x) = (x+2)(3x^2 - 5x + 2)$$

2. Cherchons les racines du polynome $3x^2-5x+2$; ce trinôme a un discrimant valant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times3\times2 = 25 - 24 = 1$$

Ainsi, il admet les deux racines suivantes:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{6} = 1$$

Il est maintenant possible d'exprimer $P(x)$ sous forme d'un produit de facteurs du premier degré:

$$P(x) = (x+2)\Big(x - \frac{2}{3}\Big)(x-1)$$

En utilisant la propriété "*Un produit est nul, si et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul*", on obtient l'ensemble des zéros du polynôme P:

$$S = \Big\{-2\,;\frac{2}{3}\,;1\Big\}$$

Correction 5

1. Développons cette expression:

$$(2 \cdot x - 1)(a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$$
$$= 2a \cdot x^3 + 2b \cdot x^2 + 2c \cdot x - a \cdot x^2 - b \cdot x - c$$
$$= 2a \cdot x^3 + (2b - a) \cdot x^2 + (2c - b) \cdot x - c$$

Par identification des coefficients de même degré, on obtient le système d'équations ci-dessous:

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2 \cdot b - a = -18 \\ 2 \cdot c - b = 16 \\ -c = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 \cdot b - a = -18 \\ 2 \cdot c - b = 16 \\ c = 4 \end{cases}$$

Résolvons la seconde et troisième équations séparemment:

$$\begin{aligned} 2 \cdot b - a &= -18 \\ 2 \cdot b - 2 &= -18 \\ 2 \cdot b &= -18 + 2 \\ 2 \cdot b &= -16 \\ b &= \frac{-16}{2} \\ b &= -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot c - b &= 16 \\ 2\times4 - b &= 16 \\ 8 - b &= 16 \\ -b &= 16 - 8 \\ -b &= 8 \\ b &= -8 \end{aligned}$$

Ainsi, on a la factorisation:

$$f(x) = (2 \cdot x - 1)(2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4)$$

2. Le polynôme $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4$ admet pour discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4\times2\times4 = 64 - 32 = 32$$

On a la simplification: $\sqrt{\Delta} = \sqrt{32} = \sqrt{16\times2} = 4\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-8)-4\sqrt{2}}{2\times2} = \frac{8-4\sqrt{2}}{4} = \frac{4 \cdot (2-\sqrt{2})}{4} = 2 - \sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-(-8)+4\sqrt{2}}{2\times2} = \frac{8+4\sqrt{2}}{4} = \frac{4 \cdot (2+\sqrt{2})}{4} = 2 + \sqrt{2}$$

Le coefficiennt du terme du second degré de ce polynôme étant strictement positif, on a le tableau de signes:

x	$-\infty$		$2-2\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$		$2+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$2{\cdot}x^2-8{\cdot}x+4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2{\cdot}x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 6

a. Le polynôme $x^2{-}3x{+}2$ du second degré a pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4{\times}1{\times}2 = 9-8 = 1$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-1}{2{\times}1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+1}{2{\times}1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ainsi, ce polynôme admet la factorisation suivante :

$$x^2-3x+2 = 2\big(x+1\big)\big(x+2\big)$$

b. Le discriminant du polynôme $-2x^2{-}2x{+}4$ a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4{\times}(-2){\times}4 = 4+32 = 36$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, les deux racines suivantes de ce polynôme sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-6}{2{\times}(-2)} = \frac{2-6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+6}{2{\times}(-2)} = \frac{2+6}{-4} = \frac{8}{-4} = -2$$

Il admet la forme factorisée suivante :

$$-2x^2-3x-1 = -2\big(x-1\big)\big[x-(-2)\big]$$
$$= -2\big(x-1\big)\big(x+2\big)$$

c. Le trinôme $-x^2{+}2x{-}1$ du second degré admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4{\times}(-1){\times}(-1) = 0$$

Ce polynôme admet une unique racine :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$$

Il admet pour forme factorisée :

$$-x^2+2x-1 = -\big(x-1\big)^2$$

d. Le polynôme $4x^2{+}x{+}3$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4{\times}4{\times}3 = 1-48 = -47$$

On en déduit que ce polynôme n'admet pas de forme factorisée.

Correction 7

1. Le polynôme $-2{\cdot}x^2{-}3{\cdot}x{+}5$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = \big(-3\big)^2-4{\times}(-2){\times}5 = 9+40 = 49$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)-7}{2{\times}(-2)} = \frac{3-7}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} = \frac{-(-3)+7}{2{\times}(-2)} = \frac{3+7}{-4} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$$

On en déduit la forme factorisée du polynôme :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = -2\Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(x-1\big)$$
$$= -\big(2{\cdot}x+5\big)\big(x-1\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

2. a. La bonne réponse est $\Big(x{+}\frac{5}{2}\Big)\big(1{-}x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$\frac{1}{2}{\cdot}\big(-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5\big) = \frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$-x^2-\frac{3}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2} = \Big[\frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}x+5\big)\Big]\big(1-x\big)$$
$$-x^2-\frac{3}{2}{\cdot}x+\frac{5}{2} = \Big(x+\frac{5}{2}\Big)\big(1-x\big)$$

b. La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x{+}5\big)\big(2{-}x\big)$:

Car :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)+\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \big[\big(2{\cdot}x+5\big)+1\big]\big(1-x\big)$$
$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5+\big(1-x\big) = \big(2{\cdot}x+6\big)\big(1-x\big)$$

c. La bonne réponse est $\big(2{\cdot}x{+}7\big){\cdot}x$:

Car de la factorisation :

$$-2{\cdot}x^2-3{\cdot}x+5 = \big(2{\cdot}x+5\big)\big(1-x\big)$$

On en déduit :

$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2-3{\cdot}\big(x{+}1\big)+5 = \Big[2{\cdot}\big(x{+}1\big)+5\Big]\Big[1-\big(x{+}1\big)\Big]$$
$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2-3{\cdot}\big(x{+}1\big)+5 = \big(2{\cdot}x+2+5\big)\big(1-x-1\big)$$
$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2-3{\cdot}\big(x{+}1\big)+5 = \big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}\big(-x\big)$$
$$-2{\cdot}\big(x{+}1\big)^2-3{\cdot}\big(x{+}1\big)+5 = -\big(2{\cdot}x+7\big){\cdot}x$$

Correction 8

1. Le polynôme $3x^2{+}4x{-}4$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2-4{\times}3{\times}(-4) = 16+48 = 64$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ \quad = \dfrac{-4-8}{2\times 3} & \quad = \dfrac{-4+8}{2\times 3} \\ \quad = \dfrac{-12}{6} & \quad = \dfrac{4}{6} \\ \quad = -2 & \quad = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2+4x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Le polynôme $-4x^2+2x+6$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times(-4)\times 6 = 4+96 = 100$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \\ \quad = \dfrac{-2-10}{2\times(-4)} & \quad = \dfrac{-2+10}{2\times(-4)} \\ \quad = \dfrac{-12}{-8} & \quad = \dfrac{8}{-8} \\ \quad = \dfrac{3}{2} & \quad = -1 \end{array}$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-4x^2+2x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Cherchons les racines de $2x^2+11x+5$.
L'étude du discrimant donne :
$\Delta = b^2-4ac = 11^2-4\times 2\times 5 = 81 > 0$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$

Les racines de ce polynome sont :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-11-9}{4} & \quad = \dfrac{-11+9}{4} \\ \quad = -5 & \quad = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Le coefficient du terme de coefficent 2 est positif.

Voici le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2+11x+5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 9

a. Le polynôme x^2-3x+2 a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-3)^2-4\times 1\times 2 = 9-8 = 1$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-(-3)-1}{2\times 1} & \quad = \dfrac{-(-3)+1}{2\times 1} \\ \quad = \dfrac{2}{2} & \quad = \dfrac{4}{2} \\ \quad = 1 & \quad = 2 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \big]-\infty\,;1\big[\cup\big]2\,;+\infty\big[$

b. Le polynôme x^2-x-2 a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2-4\times 1\times(-2) = 1+8 = 9$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-(-1)-3}{2\times 1} & \quad = \dfrac{-(-1)+3}{2\times 1} \\ \quad = \dfrac{-2}{2} & \quad = \dfrac{4}{2} \\ \quad = -1 & \quad = 2 \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \big]-1\,;\,2\big[$

c. Le polynôme $-9x^2+12x-4$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 12^2-4\times(-9)\times(-4) = 144-144 = 0$

Le discriminant étant nul, ce polynôme admet une unique rqcine :
$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2\times(-9)} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$

Puisque le coefficient du second degré de ce polynôme est négatif, o a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+12x-4$		$-$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \mathbb{R}$

Correction 10

1. Le polynôme $5x^2+4x-1$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 4^2-4\times 5\times(-1) = 16+20 = 36$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-4-6}{2\times 5} & \quad = \dfrac{-4+6}{2\times 5} \\ \quad = \dfrac{-10}{10} & \quad = \dfrac{2}{10} \\ \quad = -1 & \quad = \dfrac{1}{5} \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$5x^2+4x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \Big]-1\,;\,\dfrac{1}{5}\Big[$

2. Le polynôme $-4x^2+2x+2$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2-4\times(-4)\times 2 = 4+32 = 36$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-2-6}{2\times(-4)} & \quad = \dfrac{-2+6}{2\times(-4)} \\ \quad = \dfrac{-8}{-8} & \quad = \dfrac{4}{-8} \\ \quad = 1 & \quad = -\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Le coefficient du second degré étant strictement négatif, on a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-4x^2+2x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \Big[-\dfrac{1}{2}\,;\,1\Big]$

3. Le polynôme $-x^2+x-3>0$ a pour discriminant :
$\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2-4\times(-1)\times(-3) = 1-12 = -11$

Le discriminant étant strictement négatif et le coefficient du terme du seconde degré étant négatif, ce polynôme admet pour tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2+x-3$		$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\mathcal{S}=\varnothing$ *(l'ensemble vide)*

Correction 11

1. En développant la forme factorisée, on obtient :
$$\begin{aligned}&(3x-1)\big(a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c\big)\\ &\quad = (3a{\cdot}x^3+3b{\cdot}x^2+3c{\cdot}x-a{\cdot}x^2-b{\cdot}x-c\\ &\quad = 3a{\cdot}x^3+\big(3b-a\big){\cdot}x^2+\big(3c-b\big){\cdot}x-c\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients degré par degré, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{aligned}3a&=3\\3b-a&=5\\3c-b&=-5\\-c&=1\end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}a&=1\\3b-a&=5\\3c-b&=-5\\c&=-1\end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}a&=1\\3b-1&=5\\-3-b&=-5\\c&=-1\end{aligned}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned}a&=1\\3b&=6\\-b&=-2\\c&=-1\end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}a&=1\\b&=2\\b&=2\\c&=-1\end{aligned}\right.$$

Ainsi, ce système admet pour solution l'unique triplet $\big(1\,;2\,;-1\big)$; on obtient la factorisation suivante :
$\mathcal{P} = (3x-1)(x^2+2x-1)$

2. Cherchons les racines du facteur du second degré ; son discriminant a pour valeur :
$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times1\times(-1) = 4+4 = 8$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Ainsi, le discriminant étant positif, ce facteur admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \quad = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} & \quad = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} \\ \quad = -1-\sqrt{2} & \quad = -1+\sqrt{2} \end{array}$$

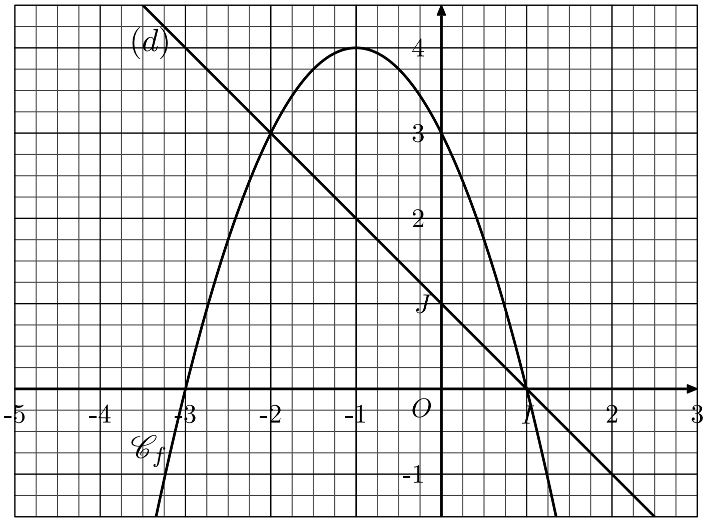
Le premier facteur s'annule pour $\dfrac{1}{3}$; sachant qu'un produit est nul si, et seulement si, un de ses facteurs est nul, alors le polynôme $\mathcal{P}$ admet pour l'ensemble de ses racines :
$\Big\{-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\,;\,\dfrac{1}{3}\Big\}$

3. Pour dresser le tableau de signe, on remarquera :
- le facteur du secdon degré a pour coefficient du second degré un nombre positif ;
- les racines du polynôme $\mathcal{P}$ sont ordonnées de la manière suivante :
$-1-\sqrt{2} < \dfrac{1}{3} < -1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$\frac{1}{3}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x^3+5x^2-5x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Correction 12

1. Voici la représentation de la droite (d) :



2. a. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d), nous allons étudier le signe de la différence :

$$f(x)-g(x)=\left(-x^2-2x+3\right)-\left(-x+1\right)$$
$$=-x^2-2x+3+x-1=-x^2-x+2$$

Ce polynôme admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=\left(-1\right)^2-4{\times}(-1){\times}2=1+8=9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit l'existence des deux racines suivantes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$=\dfrac{-(-1)-3}{2{\times}(-1)}$	$=\dfrac{-(-1)+3}{2{\times}(-1)}$
$=\dfrac{1-3}{-2}$	$=\dfrac{1+3}{-2}$
$=\dfrac{-2}{-2}$	$=\dfrac{4}{-2}$
$=1$	$=-2$

Le coefficient du terme du second degré etant strictement négatif, on en déduit le signe de $f-g$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. On en déduit les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite (d) :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessous la droite (d) sur la réunion d'intervalle : $\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite (d) sur l'intervalle $\left]-2\,;1\right[$.

Correction 13

1. Les zéros de la fonction f sont les racines du polynôme $x^2-6{\cdot}x+7$ qui admet pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-6)^2-4{\times}1{\times}7=36-28=8$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2{\cdot}\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$=\dfrac{-(-6)-2\sqrt{2}}{2{\times}1}$	$=\dfrac{-(-6)+2\sqrt{2}}{2{\times}1}$
$=\dfrac{6-2\sqrt{2}}{2}$	$=\dfrac{6+2\sqrt{2}}{2}$
$=\dfrac{2{\cdot}\left(3-\sqrt{2}\right)}{2}$	$=\dfrac{2{\cdot}\left(3+\sqrt{2}\right)}{2}$
$=3-\sqrt{2}$	$=3+\sqrt{2}$

2. Pour étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, considérons la comparaison :

$$f(x)<g(x)$$
$$x^2-6{\cdot}x+7<2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+2$$
$$\left(x^2-6{\cdot}x+7\right)-\left(2{\cdot}x^2-2{\cdot}x+2\right)<0$$
$$x^2-6{\cdot}x+7-2{\cdot}x^2+2{\cdot}x-2<0$$
$$-x^2-4{\cdot}x+5<0$$

Le polynôme $-x^2-4{\cdot}x+5$ a pour discriminant :

$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-4)^2-4{\times}(-1){\times}5=16+20=36$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$

Puisque le discriminant est positif, on a les deux racines :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$	$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$
$=\dfrac{-(-4)-6}{2{\times}(-1)}$	$=\dfrac{-(-4)+6}{2{\times}(-1)}$
$=\dfrac{4-6}{-2}$	$=\dfrac{4+6}{-2}$
$=\dfrac{-2}{-2}$	$=\dfrac{10}{-2}$
$=1$	$=-5$

Le coefficient du second degré de ce polynôme étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$-x^2-4{\cdot}x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit :

- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe sous la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble $\left]-\infty\,;-5\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ sur l'ensemble $\left]-5\,;1\right[$.

Correction 14

Calculons les aires nécessaires à cet exercice :

- Le carré $ABCD$ a pour aire : $\mathcal{A}_{ABCD}=5^2=25$
- Les deux carrés hachurés ont pour aire $\mathcal{A}_H=x^2+(5-x)^2$

La condition demandée s'énonce de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
x^2+(5-x)^2 &= \frac{3}{4}\times 25\\
x^2+(x^2-10x+25) &= \frac{3}{4}\times 25\\
2x^2-10x+25 &= \frac{75}{4}\\
4\times\big(2x^2-10x+25\big) &= 4\times\frac{75}{4}\\
8x^2-40x+100 &= 75\\
8x^2-40x+25 &= 0
\end{aligned}$$

Etudions le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = b^2-4ac = (-40)^2-4\times 8\times 25 = 1600-800 = 800$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{800}=20\times\sqrt{2}$.

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-40)-20\sqrt{2}}{16} = \frac{10-5\sqrt{2}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-40)+20\sqrt{2}}{16} = \frac{10+5\sqrt{2}}{4}$$

Il existe deux positions possibles pour le point I :

$$S=\left\{\frac{10-5\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{10+5\sqrt{2}}{4}\right\}$$

Correction 15

1. Déterminons le discriminant du polynôme du membre de gauche :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = \Big(-\frac{37}{2}\Big)-4\times 1\times 85 = \frac{1369}{4}-340 = \frac{1369}{4}-\frac{1360}{4} = \frac{9}{4}$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\Big(-\frac{37}{2}\Big)-\frac{3}{2}}{2\times 1} = \frac{\frac{37}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{34}{2}}{2} = \frac{17}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-\Big(-\frac{37}{2}\Big)+\frac{3}{2}}{2\times 1} = \frac{\frac{37}{2}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{40}{2}}{2} = 10$$

2. a. Le rectangle ayant $37\,m$ de périmètre, on doit avoir :

$$\begin{aligned}
2\cdot\big(L+\ell\big) &= 37\\
L+\ell &= \frac{37}{2}\\
\ell &= \frac{37}{2}-L
\end{aligned}$$

b. Sachant que l'aire du rectangle est de $85\,m^2$, on a la relation :

$$\begin{aligned}
L\times\ell &= 85\\
L\cdot\Big(\frac{37}{2}-L\Big) &= 85\\
\frac{37}{2}\cdot L-L^2 &= 85\\
L^2-\frac{37}{2}\cdot L+85 &= 0
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a :

- $L=10 \implies \ell=\frac{17}{2}$
- $L=\frac{17}{2} \implies \ell=10$

Le rectangle a $\frac{17}{2}\,m$ pour longueur et $10\,m$ pour largeur.

Correction 16

- Le nombre x correspondant à la longueur du segment $[AD]$, sa valeur est positive : $x\geqslant 0$
  Le point B appartenant au côté $[AE]$, on doit avoir : $2x\leqslant 4$.
  On en déduit que l'indéterminé x appartient à l'intervalle $\big[0\,;2\big]$.
- Le rectangle $ABCD$ a pour dimension x et $2x$. Son aire $\mathcal{A}_1$ a pour valeur :
  $\mathcal{A}_1 = x\times 2x = 2x^2$
- Le rectangle $CIFH$ a pour dimension $4-2x$ et $4-x$. Son aire $\mathcal{A}_2$ a pour valeur :
  $$\mathcal{A}_2 = \big(4-2x\big)\big(4-x\big) = 16-4x-8x+2x^2 = 2x^2-12x+16$$
- Ainsi, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine grisé, s'exprime par :
  $$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2 = 2x^2+\big(2x^2-12x+16\big) = 4x^2-12x+16$$
- Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &\geqslant \frac{37}{4}\\
4x^2-12x+16 &\geqslant \frac{37}{4}\\
4x^2-12x+16-\frac{37}{4} &\geqslant 0\\
4x^2-12x+\frac{64}{4}-\frac{37}{4} &\geqslant 0\\
4x^2-12x+\frac{27}{4} &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Le polynôme du membre de gauche est du second degré et dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = \big(-12\big)^2-4\times 4\times\frac{27}{4} = 144-108 = 36$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-12)-6}{2\times 4} = \frac{12-6}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-12)+6}{2\times 4} = \frac{12+6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{4}$		$+\infty$
$4x^2-12x+\dfrac{27}{4}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- La valeur de x étant comprise dans l'intervalle $\left[0\,;2\right]$, les solutions sont pour :
  $\mathcal{S}=\left[0\,;\dfrac{3}{4}\right]$