Suites - Généralités

I Définition

Définition 1
Une ***suite numérique*** *(u_n) est une liste ordonnée de nombres réels, telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n*
u_n est appelé ***terme d'indice n (ou de rang n)***

Exemple 1
Si l'on considère la liste des nombre pairs : $2; 4; 6; 8...$, on peut ainsi noter (u_n) l'ensemble des éléments de cette suite de nombres, avec :
$u_0 =$ ...., $u_1 =$ ...., $u_2 =$ ...., etc.
Le terme d'indice 3 de la suite (u_n) est ....

II Différentes façons de définir une suite

1) A l'aide d'une formule explicite

Définition 2
Lorsque l'on utilise une ***formule explicite****, chaque* ***terme de la suite est exprimé en fonction de n*** *et* ***indépendamment des termes précédents****.*

Exemple 2
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5n^2 - 4$. On a donc :
$u_0 =$ ....
$u_1 =$ ....
$u_2 =$ ....
$u_3 =$ ....

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2n + 1$. On a donc :
$v_0 =$ ....
$v_1 =$ ....
$v_2 =$ ....
$v_3 =$ ....
(v_n) représente donc ....

2) A l'aide d'une relation de récurrence

Définition 3
Lorsqu'on utilise une ***relation de récurrence****, chaque* ***terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) des termes précédents****.*

Exemple 3
1)On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le double de son précédent. Donc :
$u_0 =$ ....
$u_1 =$ ....
$u_2 =$ ....

2) On définit la suite (v_n) par $v_0 = 4$ et $v_{n+1} = 3v_n - 2$
$v_1 =$ ....
$v_2 =$ ....
$v_3 =$ ....

Remarque
A l'aide d'une relation de récurrence, il n'est pas possible par exemple de calculer v_{25} sans connaitre v_{24}, et v_{24} sans connaitre v_{23} etc.
Donc pour calculer v_{25} il faudrait calculer un à un tous les termes de la suite jusqu'à v_{25}

A l'aide de la **calculatrice ou du logiciel Python**, il est cependant possible d'écrire un algorithme afin de pouvoir le calculer.

III Sens de variation

Définition 4
(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Dire que $\boldsymbol{(u_n)}$ ***est croissante*** *signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$
- Dire que $\boldsymbol{(u_n)}$ ***est décroissante*** *signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$

1) Méthode 1 : Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$

Propriété 1
(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \leq 0}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**

Démonstration
....
....

Exemple 4
1) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 9$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....

2) Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3n + 1$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....
....
....

3) Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 2n^2 - 4n + 6$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....
....
....
....
....

2) Méthode 2 : Comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Propriété 2
(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ **à termes strictement positifs**.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est croissante**
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1}$ alors la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**

Démonstration
....
....

Exemple 5
1) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 6u_n$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....

2) Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....
....
....
....
....
....
....

3) Méthode 3 : A l'aide de la fonction associée

Définition 5
Soit une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Soit un entier p.
*- Si **$\boldsymbol{f}$ est croissante** sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite **$\boldsymbol{(u_n)}$ est croissante à partir du rang $\boldsymbol{p}$.***
*- Si **$\boldsymbol{f}$ est décroissante** sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite **$\boldsymbol{(u_n)}$ est décroissante à partir du rang $\boldsymbol{p}$.***

Démonstration
....
....

Exemple 6
Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n^2 - 8n + 11$, étudier le sens de variation de cette suite
....
....
....
....
....
....
....
....

IV Notion de limite

1) Si plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher d'une valeur l, alors on dit que **la suite converge vers l** et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
2) Si plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grands (respectivement petits) on dit que **la suite diverge vers $+\infty$** (respectivement $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)
3) Lorsque n devient grand, si les termes ne semble ni se rapprocher d'une valeur, ni devenir de plus en plus grands ni de plus en plus petits, on dit que **la suite diverge** et qu' **elle n'a pas de limite**.

Exemple 7
1) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$
....
....
....

2) Soit (v_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \dfrac{3n-2}{n}$
....
....
....
....

3) Soit (w_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1)^n$
....
....
....