Produit scalaire et orthogonalité

I Produit scalaire dans un repère orthonormé

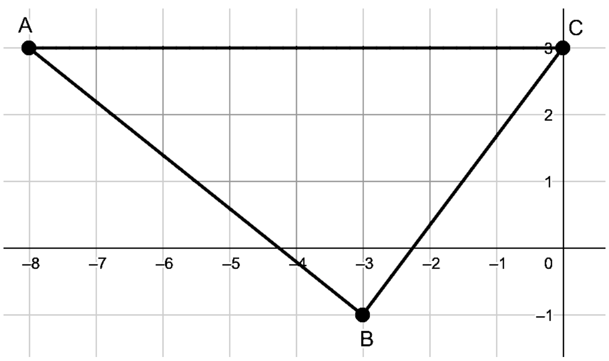
Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé

Propriété 1
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tel que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors : $\boldsymbol{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$

Démonstration

Exemple 1
.
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
....
....

Exercice 1
Le triangle ABC est représenté ci-contre.
A l'aide de 2 expressions du produit scalaire, calculer l'angle $\widehat{BAC}$ en arrondissant au centième de degré.



II Orthogonalité

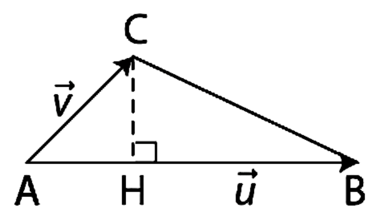
Définition 1
1) Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont ***orthogonaux*** *signifie que les droites (AB) et (AC) sont* ***perpendiculaires***
2) Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur

Propriété 2
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **et** $\boldsymbol{\overrightarrow{v}}$ **sont orthogonaux** $\Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0}$

Démonstration

Exemple 2
Soient 3 points $E(-1;3)$, $F(7;2)$ et $G(1;19)$.
Le triangle EFG est il rectangle en E?

Propriété 3
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nul du plan tel que :
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :
$\boldsymbol{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}}$

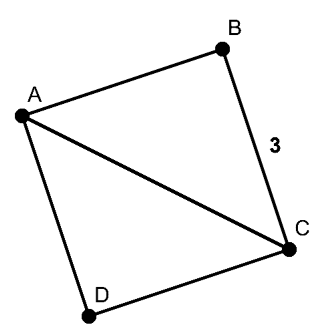


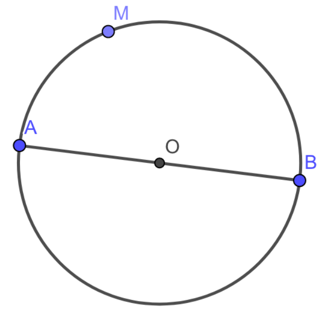
Démonstration

Exemple 3
Soit $ABCD$ un carré de côté 3, calculer les produits scalaires suivants:
1) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CA}$

3) $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$





Propriété 4
Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M vérifiant l'égalité : $\boldsymbol{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0}$ est **le cercle de diamètre** $[\boldsymbol{AB}]$

Démonstration
EXIGIBLE

Conséquence
On retrouve une propriété admise au collège :