Variable aléatoire

I Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

Définition 1
Rappels
- *Chaque résultat d'une expérience aléatoire s'appelle une* ***issue***
- ***l'univers*** $\boldsymbol{\Omega}$ *est l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire*
- *Un* ***évènement*** $\boldsymbol{A}$ *est un sous ensemble de l'univers* Ω
- *Un* ***évènement élémentaire*** *est un événement qui ne contient qu'une seule issue*

Exemple 1
On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le résultat obtenu.
$\Omega =$ ....
On considère les évèmenements suivants :
A : Le résultat est un nombre impair
B : Le résultat est un nombre strictement supérieur à 5
Donc $A =$ ....et $B =$ ....
..........est un évènement élémentaire

Définition 2
Soit Ω *l'univers d'une expérience aléatoire.*
Définir une ***variable aléatoire*** *sur* Ω*, c'est associer à chaque issue de* Ω *un nombre réel*

Notations
- On note généralement une variable aléatoire par une lettre majuscule : X, Y, Z etc.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'évènement : " X prend la valeur x est noté : $\{X = x\}$
- L'évènement : " X prend une valeur strictement inférieure à x est noté : $\{X < x\}$

Exemple 2
En reprenant l'exemple 1 :
Lorsque le dé indique 1, 2 ou 3, on gagne 4 euros
Lorsque le dé indique 4 ou 5 on gagne 1 euros
Lorsque le dé indique 6 on perd 5 euros
On définit ainsi une variable aléatoire X qui au numéro du dé, associe le gain, en euro, du joueur.
Cette variable prend les valeurs : ....
L'évènement $\{X = 1\}$ est réalisé par les issues ....
L'évènement $\{X < 2\}$ est réalisé par les issues ....

2) Loi de probabilité

Définition 3
Soit X *une variable aléatoire définie sur un univers* Ω *et prenant les valeurs* $x_1, x_2, ..., x_n$.
La ***loi de probabilité*** *de* X *associe à toute valeur* x_i *la probabilité* $P(X = x_i)$

Remarque
- $P(X = x_i)$ peut se noter p_i
- $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Exemple 3
Dans l'exemple précédent :
$P(X = -5) =$ ....
$P(X = 1) =$ ....
$P(X = 4) =$ On vérifie que la somme des probabilité vaut 1 : ....
et on peut résumer ces résultats dans un tableau :

x_i			
$P(X = x_i)$ ou p_i			

Exercice 1
On tire une carte aléatoirement dans un jeu de 52 cartes.
On considère le jeu suivant :
Si on tire une dame, on gagne 7 euros
Si on tire un trèfle on gagne 2 euros
Si on tire une autre carte, on perd 1 euros
On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe le gain du joueur.
Déterminer la loi de probabilité de X

II Paramètres d'une variable aléatoire

1) Espérance, variance, écart-type

Définition 4
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.
*- **L'espérance** de la loi de probabilité de X est :*

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n}$$

*- **La variance** de la loi de probabilité de X est :*

$$\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2}$$

*- **L'écart-type** de la loi de probabilité de X est :* $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Exemple 4
Dans l'exercice précédent su jeu de cartes, calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

Remarque
L'espérance est la moyenne que l'on peut espérer si l'on repère l'expérience un grand nombre de fois
L'écart-type est une caractéristique de dispérsion "espérée" pour la loi de probabilité de X

Propriété 1
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω. Soient a et b deux réel :
$\boldsymbol{E(aX+b)=aE(X)+b}$ $\boldsymbol{V(aX+b)=a^2V(X)}$

Démonstration

2) Jeu équitable

Définition 5
Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω qui donne le gain du joueur.
Dire que ce jeu est ***équitable*** *signifie que* $\boldsymbol{E(X)=0}$

Exemple 5
Dans le jeu précédent avec des cartes, le jeu est équitable? Si non, est il favorable ou défavorable au joueur?