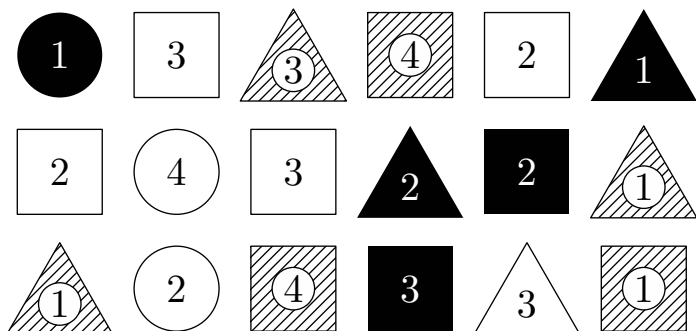


Exercices : Variable aléatoire

Exercice 1

Une urne contient 18 pièces de bois de formes, de couleurs et portant des numéros différents.



On tire au hasard un élément de cette urne. On suppose que le tirage s'effectue de manière équiprobable.

On considère les événements suivants :

- A : "la pièce est un triangle"
- B : "la pièce est de couleur blanche"
- C : "la pièce porte le numéro 2"
- D : "la pièce n'est pas un cercle"
- E : "la pièce porte un numéro pair"

Sans justification, donner la probabilité des événements suivants :

- a. $\bar{A}$ b. $A \cap C$ c. $(C \cap B) \cup A$
d. $A \cap \bar{C}$ e. $\bar{A} \cap \bar{D}$ f. $(A \cap E) \cup (C \cap D)$
g. $C \cap \bar{E}$ h. $C \cup D$ i. $\bar{A} \cup \bar{C}$

Exercice 2

On considère un jeu de carte 32 cartes et les trois événements suivants :

- A : "La carte tirée est un coeur"
- B : "La carte tirée est une figure"
- C : "La carte tirée est un nombre dont la valeur est comprise strictement entre 7 et 10"

	♥	♦	♠	♣
As	As	As	As	As
R	R	R	R	R
D	D	D	D	D
V	V	V	V	V
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7

1. On tire une carte au hasard dans le jeu de cartes. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- a. A b. B c. C
d. $A \cap B$ e. $A \cup B$ f. $A \cup C$

2. La carte "Roi de coeur" a été retirée du jeu, puis on tire au hasard une carte. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- a. A b. B c. C

Exercice 3

On considère une urne contenant 11 boules. Certaines sont rondes, d'autres carrés. Certaines sont blanches, d'autres sont rayés. Elles sont représentées ci-dessous :

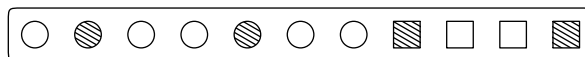
On suppose qu'en appuyant sur un bouton, les boules sortent au hasard de l'urne. On vient de constituer une expérience aléatoire suivant la loi d'équiprobabilité.

On associe un gain à chacune des boules de la manière suivante :

- Une boule rapporte 1 € alors qu'un carré rapporte 2 €.
- De plus, si l'élément est rayé, le gain est augmenté de 1 €.

Cette association d'une valeur à chaque événement élémentaire constitue une variable aléatoire. Notons la $\mathcal{X}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$ lorsque le contenu de l'urne est représenté ci-dessous :



2. Déterminer la loi de probabilité de la variable $\mathcal{X}$ lorsque le contenu de l'urne est représenté ci-dessous :



Exercice 4

Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2.

1. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à chacune des boules le numéro inscrit sur celui-ci. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. Au tirage d'une boule dans cette urne, on associe les règles de jeu suivantes :

- Si la boule tirée est bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 2 €.
- Si la boule tirée n'est pas bleu et porte un entier pair, le joueur gagne 3 €.
- Sinon le joueur ne gagne rien.

On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui associe au tirage d'une boule le gain obtenu.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=x_i)$	0,15	0,24	0,35	0,26

1. Justifier que le tableau ci-dessous représente bien une loi de probabilité.

2. Déterminer les probabilités suivantes :

- a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 2)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} < 2)$
c. $\mathcal{P}(\{\mathcal{X}=1\} \cup \{\mathcal{X}=3\})$

Exercice 6

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5 €.
- les faces "1" et "3" rapportent 2 €.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1 €.
- la face "5" ne rapporte rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

1. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

2. Déterminer la valeur de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X} > 1)$.

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{6}$ ☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{4}{6}$

Exercice 7

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	5	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$	0,4	0,38	0,15	0,05	0,02

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 8

Un jeu consiste à tirer une boule au hasard d'une urne. Le gain du jeu est associé à la couleur de la boule tirée :

- Une boule rouge rapporte 10€.
- Une boule bleu rapporte 1€.
- Une boule verte ne rapporte aucun gain.

1. L'urne A comporte 1 boule rouge, 10 boules bleues et 5 boules vertes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne A .

- a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. L'urne B comporte 3 boules rouges, 3 boules bleues et 20 boules vertes.

On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire associée au gain d'une boule tirée dans l'urne B .

- a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
- b. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{Y}$.
(on arrondira la valeur au centième près).

3. Paul souhaite participer au jeu. Quelle est l'urne la plus avantageuse pour lui?

Exercice 9

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et on associe à chaque face un gain de la manière suivante :

- la face "6" rapporte 5€.
- la face "1" rapporte 2€.
- les autres faces portant un numéro pair rapportent 1€.
- les autres faces ne rapportent rien.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque lancer du dé, associe le gain réalisé.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

$$\square \frac{9}{6} \quad \square \frac{10}{6} \quad \square \frac{11}{6} \quad \square \frac{12}{6}$$

Exercice 10

On considère un jeu de 32 cartes. Un jeu consiste à tirer une carte au hasard parmi ces cartes. On considère les trois événements ci-dessous :

- A : la carte tirée est un coeur ;
- B : la carte tirée est une figure ;
- C : la carte tirée est 7, 8 ou 9.

On associe un gain à la carte tirée de la manière suivante :

- les cartes de $A \cap C$ rapporte 1 point ;
- les cartes de $\bar{A} \cap B$ rapporte 2 points ;
- les cartes de $A \cap \bar{B}$ rapporte 4 points.

	♥	♦	♠	♣
As	As	As	As	As
R	R	R	R	R
D	D	D	D	D
V	V	V	V	V
10	10	10	10	10
9	9	9	9	9
8	8	8	8	8
7	7	7	7	7

- les autres cartes ne rapportent pas de points.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui associe à une carte le nombre de points gagnés.

Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 11

Un jeu consiste à lancer quatre fois successivement un pièce de monnaie équilibré. A chaque lancer, on note la face obtenue.

1. Construire un arbre de choix représentant cette expérience aléatoire.

On admet que les issues de cette expérience sont équiprobables. A chacune des issues, on associe un gain en suivant :

- le gain est de 0€ si le côté face n'apparaît pas ;
- le gain est de 1€ si le côté face apparaît 1 fois ;
- le gain est de 2€ si le côté face apparaît 2 fois ;
- le gain est de 4€ si le côté face apparaît 3 fois ;
- le gain est de 10€ si le côté face apparaît 4 fois ;

2. Etablir que : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=4) = \frac{1}{4}$

3. Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k)$					

4. Compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de distribution cumulative de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:

k	0	1	2	4	10
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq k)$					1

Exercice 12

En fin d'année l'association des élèves d'un lycée organise une tombola : 100 tickets sont mis en vente à 10 euros l'unité.

Voici les différents tickets gagnants :

- 2 tickets gagnent 50€ ;
- 10 tickets gagnent 20€ ;
- 20 tickets gagnent 10€.

1. Quelle est la somme des gains de cette tombola?

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un ticket au hasard et la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui à chaque ticket associe sa valeur.

2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

- a. Déterminer l'espérance $E(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- b. Déterminer la variance $V(\mathcal{X})$ et l'écart type $\sigma(\mathcal{X})$ de la variable aléatoire $\mathcal{X}$. (on arrondira les valeurs au dixième près).

Exercice 13

Cinq garçons et trois filles participent écrivent leur nom sur un bout de papier et l'insère dans une urne.

On extrait, successivement et avec remise, deux bouts de papier de l'urne. On considère que les deux tirages sont indépendants.

1. A chaque tirage, on regarde si le papier tiré désigne un garçon ou une fille. Construire l'arbre de probabilité lié à cette expérience.
2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associant à une issue de ce tirage le nombre de filles sélectionnées.

- Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
- Calculer son espérance mathématique de $E(\mathcal{X})$.

Exercice 14

Un magasin de sport propose à la location des skis de piste, des snowboards et des skis de randonnée.

Son matériel loué est constitué de 60 % de skis de piste, le reste étant également réparti entre les snowboards et les skis de randonnée.

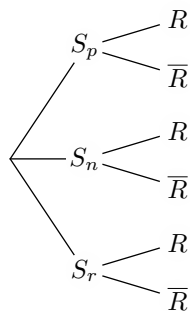
Après la journée de location, le matériel est contrôlé et éventuellement réparé. Indépendamment du type de matériel loué, 30 % du matériel nécessite une réparation.

Chaque paire de ski et chaque snowboard sont répertoriés sur une fiche qui précise son suivi. On tire au hasard une fiche. On considère les événements suivants :

- S_p : “La fiche est celle d’une paire de skis de piste” ;
- S_n : “La fiche est celle d’un snowboard” ;
- S_r : “La fiche est celle d’une paire de skis de randonnée” ;
- R : “Le matériel nécessite une réparation” ; $\bar{R}$ est son événement contraire.

Tous les résultats des quatre premières questions seront arrondies à 10^{-3} .

- Recopier et compléter l’arbre pondéré ci-contre :
- Calculer la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ne nécessitant pas une réparation.
 - Calculer $\mathcal{P}(S_p \cup \bar{R})$: la probabilité que la fiche tirée concerne une paire de skis de piste ou un matériel ne nécessitant pas une réparation.



- Le coût de la location de skis de piste ou d’un snowboard est de 20 €, celui d’une paire de skis de randonnée est de 15 €. En cas de réparation, un sur-coût de 15 € est facturé.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui associe à une fiche le montant de la facturation associée.

- Dresser un tableau représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
- Déterminer l’espérance de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

Exercice 15

Lors d’une épidémie chez des bovins, on s’est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d’animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d’utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note les événements :

- M : “l’animal est porteur de la maladie” ;
- T : “le test est positif”.

- Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
- Un animal est choisi au hasard.

- Quelle est la probabilité qu’il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
 - Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.
- Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu’il soit porteur de la maladie ? On arrondira la probabilité au millième près.
 - Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l’abattage d’un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D’après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

- Calculer l’espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
- Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d’engager ?