Fonction exponentielle

I Définition et premières conséquences

Définition 1
Définition-Propriété
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
*Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et se note **exp***

Remarque
On obtient donc 2 conséquences :
$exp(0) = 1$ et
$(exp(x))' = exp(x)$

Propriété 1
Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp(x) \neq 0$

Remarque
On pourra démontrer cette propriété en exercice d'approfondissement

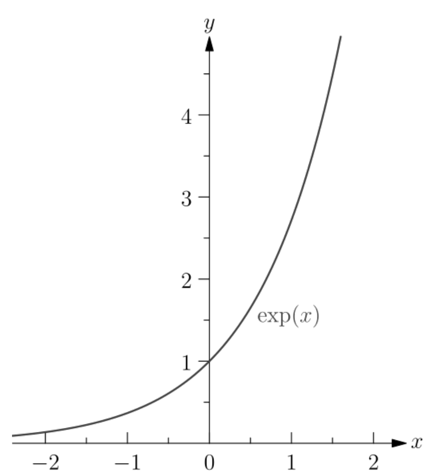
II Représentation graphique

Propriété 2
Variations
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Propriété que l'on va démontrer dans le paragraphe 3

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



III Propriétés et nouvelle notation

1) Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème 1
Pour tous réels x et y, $exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$

Remarque
Cette formule permet de ”transformer un produit en somme” et réciproquement

Propriété 3
Pour tous réels x et y on a :

1) $exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$ 2) $exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$ 3) $exp(nx) = (exp(x))^n$

Démonstration
....

....

....

Propriété 4
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Démonstration
....

....

....

Démonstration
Démonstration de la propriété 2:

....

....

2) Nouvelle notation

Définition 2
L'image de 1 *par la fonction exponentielle est noté* ***e***
Donc on a : $exp(1) = e$

Propriété 5
Nouvelle notation
On note pour tout réel x : $\boldsymbol{exp(x) = e^x}$

Avec cette nouvelle notation, on peut résumer l'ensemble des propriétés de fonction exponentielle :

Propriété 6
Pour tous réels x et y, on a :
1) $\boldsymbol{e^0 = 1}$ et $\boldsymbol{e^1 = e}$

2) $\boldsymbol{e^x > 0}$ et $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$

3) $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$ $\qquad \boldsymbol{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}}$ $\qquad \boldsymbol{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}}$ $\qquad \boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx}}$

Exemple 1
Dériver les fonctions suivantes :
$f(x) = 2e^x - 8x + 2$

....

$g(x) = (2x-3)e^x$

....

....

$h(x) = \dfrac{e^x}{x}$

....

....

....

Exemple 2
Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$

$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$C = \dfrac{1}{(e^{-3})^2} + \dfrac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

$D = \dfrac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$

Propriété 7
Pour tous réels a et b on a :
1) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

2) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemple 3
1)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $e^{x^2+7x-10} - e^{3x+22} = 0$:

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $e^{3x-2} > 1$

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+6)e^x$

1) Calculer la dérivée de la fonction f
2) Dresser le tableau de variations de f
3) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0
4) A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f et verifier les résultats précédents

IV Fonctions de la forme $f(t) = e^{kt}$

Propriété 8
La fonction $\boldsymbol{f(t) = e^{kt}}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $\boldsymbol{f'(t) = ke^{kt}}$

Démonstration
....

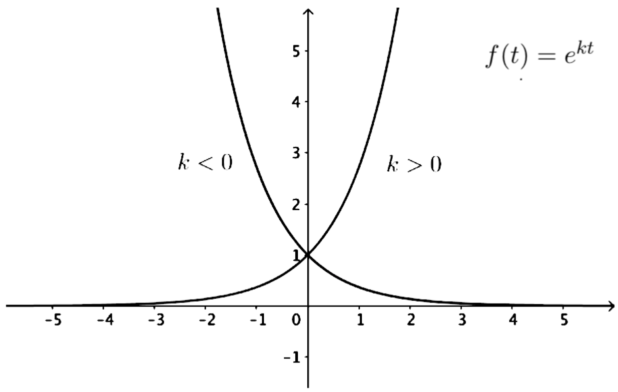
....

Exemple 4
Soient f et g deux fonctions telles que : $f(t) = e^{6t}$ et $g(t) = e^{-3t}$
Déterminer f' et g'

....

Propriété 9
Soit une fonction de la forme $f(t) = e^{kt}$:
- Si $k > 0$ alors **f est croissante**
- Si $k < 0$ alors **f est décroissante**

Démonstration
....
....
....



V Exponentielle et suite géométrique

Propriété 10
La suite (e^{na}) est une suite géométrique de raison e^a

Démonstration
....
....

Exemple 5
1)Déterminer la raison et le premier terme des suites géométriques géométriques suivantes :

(u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{9n}$
....

(v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 7e^{-4n}$
....

(w_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = -e^{\frac{n}{7}}$
....

(z_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_n = e^{3n-2}$
....

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$ et de premier terme 2
....