Second degré - Etude graphique

I Forme développée d'une fonction polynôme du second degré

Définition 1
Une fonction polynôme du second degré (ou de degré 2) est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ *, où a, b, et c désignent des nombres réels avec* $\boldsymbol{a \neq 0}$
Cette forme s'appelle ***la forme développée*** *de f*

Remarque
On parle aussi de fonction trinôme.

Exemple 1

1. $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$. $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc f
2. $g(x) = 3 - 9x^2$. $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc g
3. $h(x) = 2x + \frac{x^2}{3}$. $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc h
4. $i(x) = 3x + 9$. $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc i
   i est une ....
5. $j(x) = (x - 7)(x + 3)$.
   $j(x) =$
   $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc j
6. $k(x) = 4x^5 - 7x^3 + 1$. $a =$ ...., $b =$ ...., $c =$ ....
   Donc k
   k est appelée fonction polynôme ....

II Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 1
Toute fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme :
$\boldsymbol{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$
Cette forme s'appelle **la forme canonique** de f

Remarque
.

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{-b}{2a}} \textbf{ et } \boldsymbol{\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

Démonstration

Exemple 2
Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$
1) En factorisant par a et en trouvant le début du développement d'une identité remarquable, donner la forme canonique de f
....
....
....
....
....
....

2) En utilisant la formule précédente, retrouver le résultat de la question 1)
....
....
....

III Forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 2
Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = a(x-u)(x-v)}$**, ou** $\boldsymbol{f(x) = a(x-u)^2}$ où a, u et v désignent des réels avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme du second degré.
Cette forme s'appelle **la forme factorisée** de f

Démonstration
....

Remarque
Toute fonction du second degré n'admet pas forcément de forme factorisée.

IV Variations et représentation graphique

1) Variations

Propriété 3
Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
- Si $\boldsymbol{a > 0}$ alors f admet un **minimum égal à** $\boldsymbol{\beta}$, atteint pour $\boldsymbol{x = \alpha}$
- Si $\boldsymbol{a < 0}$ alors f admet un **maximum égal à** $\boldsymbol{\beta}$, atteint pour $\boldsymbol{x = \alpha}$

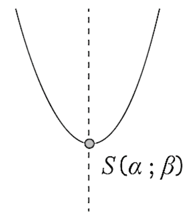
Remarque

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

f admet un minimum (ou maximum) pour $\boldsymbol{x = -\dfrac{b}{2a}}$

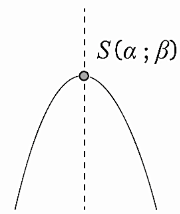
Si $a > 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\nearrow$



Si $a < 0$

x	$-\infty$	$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\beta = f(\alpha)$	$\searrow$



2) Représentation graphique

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est appelée **une parabole**.

Le sommet de la parabole est le point $\boldsymbol{S}$ de coordonnées $S(-\dfrac{b}{2a}; f(-\dfrac{b}{2a}))$

Il correspond au minimum (ou maximum) de la fonction f

La parabole possède un **axe de symétrie** : la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x - 7$

1. Donner sa forme canonique
2. Donner les principales caractéristiques de la parabole représentative de la fonction f (Sommet, minimum ou maximum, axe de symétrie)
3. Représenter graphiquement la fonction f