

Exercices type bac ln

Métropole 11 septembre 2023 sujet 1 Exercice 4

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où } \ln \text{ désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0,5; 1]$, que l'on notera α .
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[= I$ par :

$$f(x) = e^x \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

$$\text{pour tout nombre réel } x > 0, \quad f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right).$$

$$\text{Démontrer que, pour tout nombre réel } x > 0, \text{ on a : } f''(x) = e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \right).$$

2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3.
 - a. Dresser le tableau de signes de la fonction f sur $]0; +\infty[$. Justifier.
 - b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.
 - c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Justifier.
4.
 - a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - b. Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
 - c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0; +\infty[$.
 - d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

Métropole 12 septembre 2023 sujet 2 Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

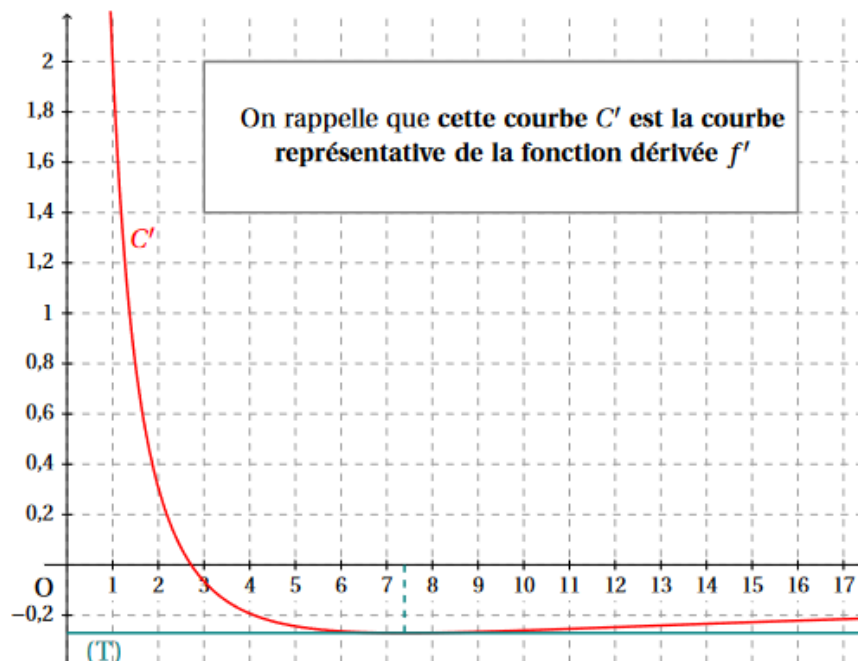
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f' , fonction dérivée de la fonction f .

La courbe C' est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :

- le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
- le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. a. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$.

b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.

Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C .