Exercices de révisions suites - 1eres spé

C.1

(a)
- $u_0=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$
- $u_1=\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$
- $u_2=\dfrac{2+1}{2+2}=\dfrac{3}{4}$
- $u_3=\dfrac{3+1}{3+2}=\dfrac{4}{5}$

(b)
- $u_0=\sqrt{0^2+0+1}=\sqrt{1}$
- $u_1=\sqrt{1^2+1+1}=\sqrt{3}$
- $u_2=\sqrt{2^2+2+1}=\sqrt{7}$
- $u_3=\sqrt{3^2+3+1}=\sqrt{13}$

(c)
- $u_0=\dfrac{0-2}{0+1}=-\dfrac{2}{1}=-2$
- $u_1=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$
- $u_2=\dfrac{2-2}{2+1}=0$
- $u_3=\dfrac{3-2}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

C.2

(1) Les cinq premiers termes de la suite ont pour valeur :
- $v_0=3$
- $v_1=\dfrac{1-v_0}{1+v_0}=\dfrac{1-3}{1+3}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$
- $v_2=\dfrac{1-v_1}{1+v_1}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$
  $=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}=3$
- $v_3=\dfrac{1-v_2}{1+v_2}=\dfrac{1-3}{1+3}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$
- $v_4=\dfrac{1-v_3}{1+v_3}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$
  $=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{1}=3$

(2) Les termes de la suite ne prennent que deux valeurs successivement ; comme il a été dit dans la question (1), la suite est périodique de période 2.

C.3 Voici les quatre premiers termes de la suite (v_n) :
- $v_0=-3$
- $v_1=0-2\cdot v_0=-2\times(-3)=6$
- $v_2=1-2\cdot v_1=1-2\times 6=1-12=-11$
- $v_3=2-2\cdot v_2=2-2\times(-11)=2+22=24$

C.4

(1) Cette relation caractérise la suite (e).

(2) Cette relation caractérise la suite (f).

(3) Cette relation caractérise la suite (c).

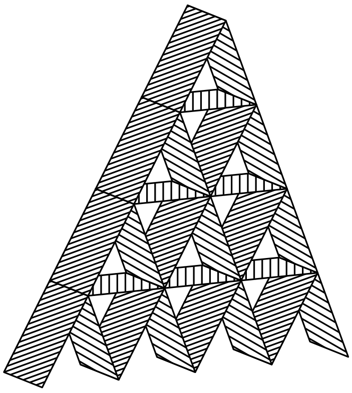
(4) Cette relation caractérise la suite (b).

(5) Cette relation caractérise la suite (a).

(6) Cette relation caractérise la suite (d).

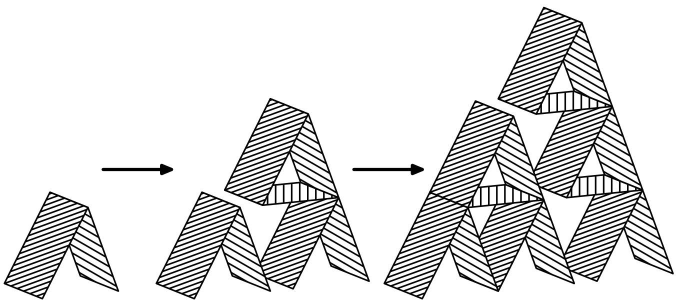
C.5

(1) Le dessin ci-dessous représente le château de cartes lié au quatrième terme de la suite :



Ainsi : $u_3=26$

(2) Pour obtenir la relation de récurrence, nous utilisons le schéma ci-dessous représentant le passage d'un château de cartes à celui de niveau supérieur :



On remarque que pour passer du château de rang n à celui de rang $(n+1)$, on rajoute :
- $2\cdot(n+2)$ cartes obliques ;
- $n+1$ cartes horizontales.

On obtient ainsi, la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1}=u_n+2(n+2)+(n+1)=u_n+3n+5$$

(3) La relation de récurrence précédente permet d'obtenir :
- $u_1=u_0+3\times 0+5=2+0+5=7$
- $u_2=u_1+3\times 1+5=7+3+5=15$
- $u_3=u_2+3\times 2+5=15+6+5=26$

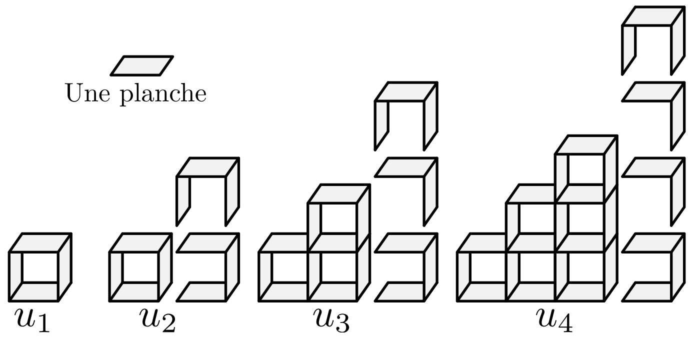
En prolongeant les calculs, on obtient le tableau suivant des valeurs des termes de la suite (u_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155

Avec 144 cartes au total, on peut atteindre le terme u_8

correspondant à château de cartes à 9 étages.

C.6



La première figure nécessite 4 planches.

À l'aide de la figure ci-dessous, on peut faire les remarques suivantes :

- Pour passer de la première étape à la seconde étape :
  Il faut rajouter 2 fois trois planches.
- Pour passer de la seconde à la troisième étape :
  Il faut rajouter 2 fois trois planches et 1 fois deux planches.
- Pour passer de la troisième à la quatrième étape :
  Il faut rajouter 2 fois trois planches et 2 fois deux planches.

En notant u_n le nombre de planches nécessaire à la $n^{\text{ième}}$ étape, on a :

$$u_{n+1} = u_n + 2\times3 + (n-1)\times2$$

qui se simplifie par :

$$u_{n+1} = u_n + 2{\cdot}n + 4$$

C.7

1 On a la simplification :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - 2(n+1)^2 - 3(n+1) - \big(n^3-2n^2-3n\big)$$
$$=(n+1)\big(n^2+2n+1\big)-2(n^2+2n+1)-3(n+1)-n^3+2n^2+3n$$
$$=\big(n^3+2n^2+n+n^2+2n+1\big)\text{-}2n^2\text{-}4n\text{-}2\text{-}3n\text{-}3\text{-}n^3+2n^2+3n$$
$$=n^3+2n^2+n+n^2+2n+1-2n^2-4n-2-3n-3-n^3+2n^2+3n$$
$$= 3n^2 - n - 4$$

2 Étudions le signe du polynôme du second degré obtenu à la question précédente ; calculons son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times3\times(-4) = (-1)^2 - 48 = 49$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = 7$

Le discriminant de ce polynôme du second degré étant positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-7}{2\times3} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+7}{2\times3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}3$$

Le coefficient du terme du second degré de ce polynôme étant positif, on a le tableau de signes ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$3x^2-x-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutifs est positive à partir du rang 2 : (u_n) est croissante à partir du rang 2.

C.8 Pour connaître le sens de variation de la suite (u_n), nous allons étudions la différence de deux termes consécutifs :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n^2+2n+1+10}{2(n+1)} - \frac{n^2+10}{2n}$$
$$= \frac{n{\cdot}\big(n^2+2n+11\big) - \big(n^2+10\big)\big(n+1\big)}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)}$$
$$= \frac{n^3+2n^2+11n-\big(n^3+10n+n^2+10\big)}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)} = \frac{n^2+n-10}{2{\cdot}n{\cdot}(n+1)}$$

L'entier n étant strictement positif, le dénominateur du quotient précédent est nécessairement positif ; ainsi, le signe du quotient ne dépend que du signe du numérateur.

Étudions le polynôme x^2+x-10 ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 1^2 - 4\times1\times(-10) = 1+40 = 41$$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; ainsi, il admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \approx -3{,}7$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \approx 2{,}7$$

Le coefficient du terme du second degré étant positif, nous allons obtenir le tableau de signes de ce polynôme.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-10		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on obtient le tableau de signes pour la différence $u_{n+1}-u_n$:

n	0		2		3		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$-$				$+$	

Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante à partir du rang 3.

C.9

1 Voici le tableau complété :

n	0	1	2	3	4
u_n	1	-1	-3	-13	-183

2 L'étude de la différence de deux termes consécutifs donne :

$$u_{n+1} - u_n = \big(u_n - {u_n}^2 - 1\big) - u_n = -{u_n}^2 - 1 < 0$$

Ainsi, la différence de termes consécutifs de la suite est négative, on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

C.10 Tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

Pour étudier la monotonie de la suite, étudions le quotient de deux termes consécutifs de la suite (u_n) :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{4}}{\frac{3^n}{4}} = \frac{3^{n+1}}{4}\times\frac{4}{3^n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 > 1$$

Le quotient étant strictement supérieur à 1 pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

C.11

1. • Commençons par simplifier l'expression :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1{,}2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{1{,}2^n}{n^2}} = \frac{1{,}2^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{1{,}2^n} = 1{,}2\times\frac{n^2}{(n+1)^2}$$

• Établissons l'identité demandée :

$$1{,}2\times\frac{n^2}{(n+1)^2} - 1 = \frac{1{,}2\cdot n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{1{,}2\cdot n^2-(n^2+2\cdot n+1)}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{0{,}2\cdot n^2-2\cdot n-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2-10\cdot n-5}{5\cdot(n+1)^2}$$

2. • Étudions le polynôme $x^2-10\cdot x-5$ qui admet pour discriminant :

$\Delta = b^2-4ac = (-10)^2-4\times1\times(-5) = 100+20 = 120$

On a : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{120} = \sqrt{4\times30} = 2\sqrt{30}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)-2\sqrt{30}}{2} = 5-\sqrt{30}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10)+2\sqrt{30}}{2} = 5+\sqrt{30}$$

Le coefficient du terme de second degré de ce polynôme étant positif, on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$5-\sqrt{30}$		$5+\sqrt{30}$		$+\infty$
$x^2-10x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

• D'après la valeur approchée $5+\sqrt{30}\approx10{,}5$, on en déduit que pour n supérieur ou égal à 11, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}-1 > 0$$
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Les termes de la suite (u_n) étant strictement positifs, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 11.

C.12

1. Les quatre premiers termes de la suite (u_n) sont :

• $u_1 = 1$

• $u_2 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_1}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1}} = \dfrac{1}{2}$

• $u_3 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_2}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$

• $u_4 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{u_3}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$

2. a. $v_1 = \dfrac{1}{1} = 1$

b. $1+\dfrac{1}{v_n} = 1+\dfrac{1}{\frac{1}{n}} = 1+1\times\dfrac{n}{1} = 1+n$

c. Par définition de la suite (v_n), on a :

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{v_n}}$$

3. Les suites (u_n) et (v_n) sont définies toutes deux sur $\mathbb{N}^*$ et ont la même première valeur :

$u_1 = 1$; $v_1 = 1$

Les deux suites (u_n) et (v_n) vérifient la même relation par récurrence.

$$u_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{u_n}} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{v_n}}$$

Ces deux suites ont leurs premiers termes égaux u_1 et v_1 : les termes de ces deux suites sont toujours égaux.