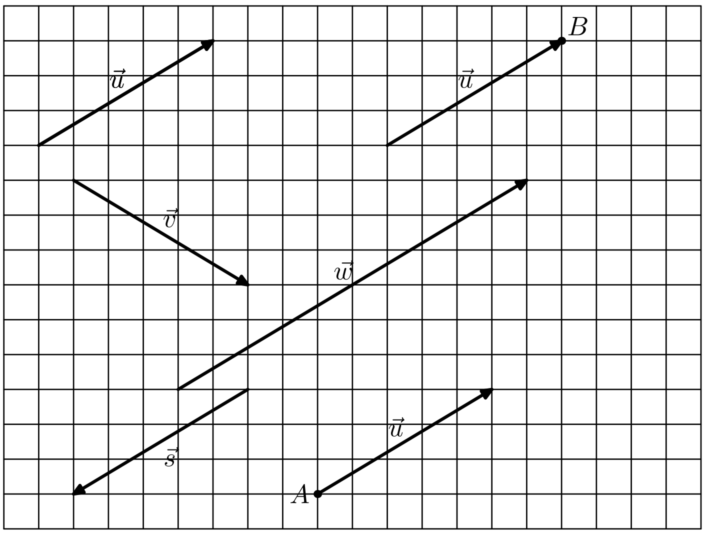
CORRECTIONS

Exercices : Vecteurs

Correction 1

Par rapport à $\vec{u}$ comparaison	de la direction	du sens	de la longueur
$\vec{v}$	identique	identique	identique
$\vec{w}$	différent	différent	identique
$\vec{r}$	identique	opposé	différent
$\vec{s}$	identique	opposé	identique
$\vec{t}$	différent	différent	différent

Correction 2



Correction 3

a. **Faux :**
En supposant que ce soit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ qui sont égaux alors ce sera le quadrilatère $ABDC$ qui sera un parallélogramme.
En l'occurence, ici, le quadrilatère $ABCD$ sera un quadrilatère croisé.

b. **Vrai :**
Les diagonales du quadrilatère $CBDA$ sont les segments $[CD]$ et $[BA]$. Ainsi, si les diagonales ont même milieu alors le quadrilatère $CBDA$ est un parallélogramme.

c. **Vrai :**
D'après le cours, si le quadrilatère $MNPQ$ est parallélogramme alors les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{QP}$ sont égaux.

d. **Faux :**
Pour le quadrilatère $WXYZ$, les segments $[WX]$ et $[YZ]$ étant des côtés du quadrilatère $WXYZ$, ils ne peuvent pas avoir le même milieu.

Correction 4

Voici les phrases complétés :

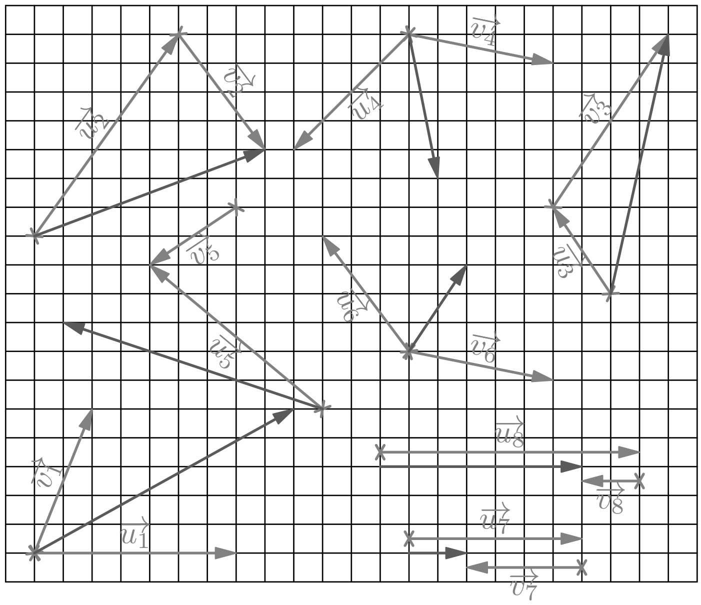
a. Si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ alors le point I est le milieu du segment $[AB]$.

b. Si $ABCD$ est un parallélogrammme alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

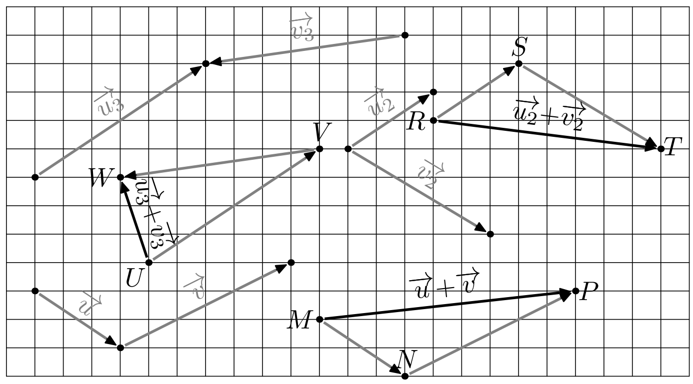
c. Si K est le milieu du segment $[XY]$ alors $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{KY}$

d. Si $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$ alors $MNQP$ est un parallélogramme.

Correction 5



Correction 6



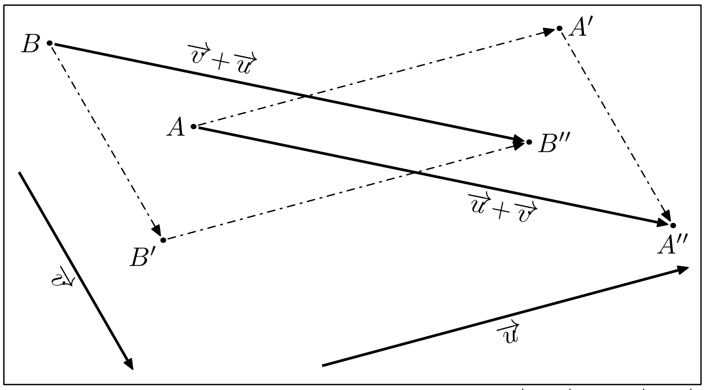
1. (c.) L'image du point M par la translation du vecteur $\vec{u}$ est le point N.
L'image du point N par la translation du vecteur $\vec{v}$ est le point P.
Ainsi, le point P est l'image du point M par la composée de la translation du vecteur $\vec{u}$ par la translation de vecteur $\vec{v}$.
On en déduit l'égalité : $\overrightarrow{MP}=\vec{u}+\vec{v}$

2. (b.) Le point T est l'image du point R par la composée de la translation de vecteur $\vec{u}_2$ et de la translation de vecteur $\vec{v}_2$.
On a : $\overrightarrow{RT}=\vec{u}_2+\vec{v}_2$

3. Sur la figure ci-dessus :
   - Le point V est l'image du point U par la translation de vecteur $\vec{u}_2$.
   - Le point W est l'image du point V par la translation de vecteur $\vec{w}_2$.

   On a : $\overrightarrow{UW}=\vec{u}_3+\vec{v}_3$

Correction 7



3. On conjecture que les deux vecteurs $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ sont égaux.

Correction 8

a. $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{KG}$

b. $\overrightarrow{QF}+\overrightarrow{JL}=\overrightarrow{OF}$

c. $\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OF}$

d. $\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{LE}$

Correction 9

1. a. Les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{FE}$ sont :
$\overrightarrow{DF}$; $\overrightarrow{EI}$; $\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{HJ}$

b. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{AH}$

2. Utiliser la relation de Chasles pour répondre aux questions suivantes :

a. $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{JB}$
$=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EJ}+\overrightarrow{JB}=\left(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EJ}\right)+\overrightarrow{JB}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{FJ}+\overrightarrow{JB}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{FB}$

b. $\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{JE}$
$=\left(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HG}\right)+\overrightarrow{JE}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{JE}=\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GD}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{ID}$

c. $\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GH}$
$=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IG}\right)+\overrightarrow{GH}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GH}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{EH}$

d. $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{DG}+\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GJ}$
D'après la relation de Chasles :
$=\overrightarrow{DJ}$

Correction 10

a. $\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{N\dots}$
$\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{JW}=\overrightarrow{N\dots}$
$\overrightarrow{NW}=\overrightarrow{N\dots}$
On en déduit que le vecteur recherché est : $\overrightarrow{NW}$

b. $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{G\dots}$
$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{G\dots}$
$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{G\dots}$
$\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CJ}\right)+\overrightarrow{LQ}=\overrightarrow{G\dots}$
$\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{G\dots}$
$\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{G\dots}$
Le vecteur recherché est : $\overrightarrow{GO}$

c. $\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{\dots Q}$
$\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{\dots Q}$
$\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{\dots Q}$
$\overrightarrow{TQ}=\overrightarrow{\dots Q}$
Le vecteur recherché est : $\overrightarrow{TQ}$

d. $\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{KV}=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KV}=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{UM}+\left(\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{KV}\right)=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{UM}+\overrightarrow{HV}=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HV}=\overrightarrow{\dots V}$
$\overrightarrow{PV}=\overrightarrow{\dots V}$
Le vecteur recherché est : $\overrightarrow{PV}$

Correction 11

1. a. La relation de Chasles permet de justifier cette égalité.

b. On a : $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QD}$

c. On a les transformations suivantes :
$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{PD}=\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{PD}$
$=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{NC}$

2. a.
- $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{QO}$
- $\overrightarrow{HS}=\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PS}$

Cette somme s'exprime par :
$\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{HS}=\left(\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{QO}\right)+\left(\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PS}\right)$
$=\left(\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{HP}\right)+\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{PS}\right)=\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IQ}\right)+\left(\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}\right)$
$=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{CR}$
Il existe ainsi deux vecteurs représentants de cette

somme : $\overrightarrow{CR}$; $\overrightarrow{AQ}$

b. • $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QI}$

• $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}$

Cette somme s'exprime par :

$$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{AR}=\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QI}\right)+\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PR}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{QI}+\overrightarrow{AP}\right)+\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}\right)+\left(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}\right)$$
$$=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{BT}$$

Correction 12

1. Comme vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{BC}$, on peut citer :
   $\overrightarrow{DA}$ ou $\overrightarrow{CB}$
2. Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{OB}$ ayant pour origine O est le vecteur $\overrightarrow{OD}$.
3. Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AD}$ ayant pour extrémité le point B est le vecteur $\overrightarrow{CB}$.

Correction 13

1. Compléter le tableau suivant :

i	$(x_{A_i}\,;y_{A_i})$	$(x_{B_i}\,;y_{B_i})$	$x_{B_i}-x_{A_i}$	$y_{B_i}-y_{A_i}$
1	$(-3\,;1)$	$(1\,;3)$	4	2
2	$(-3\,;-1)$	$(0{,}5\,;-3{,}5)$	3,5	$-2{,}5$
3	$(3{,}5\,;3{,}5)$	$(0{,}5\,;-2)$	-3	$-5{,}5$

2. a. 4 représente le déplacement sur les abscisses pour passer du point A_1 au point B_1 ; 2 représente le déplacement sur les ordonnées pour le même déplacement.

   b. 2,5 ne représente pas le déplacement des ordonnées correspondant au second vecteur car ce déplacement s'effectuant dans le sens négatif de l'axe des ordonnées, la valeur associée est $-2{,}5$.

Correction 14

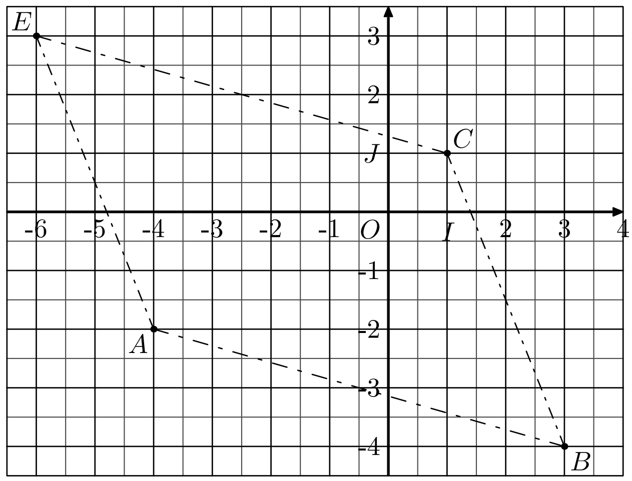
1. On a les coordonnées des vecteurs :
   $\overrightarrow{AB}(1\,;-5)$; $\overrightarrow{CD}(6\,;0{,}5)$; $\overrightarrow{EF}(2\,;2)$
2. a. Voici les coordonnées des points :
   $G(6\,;0{,}5)$; $H(3\,;3)$; $K(1{,}5\,;3)$
   $L(-3\,;2{,}5)$; $M(-1{,}5\,;-1)$; $N(3\,;-2)$

   b. On a les coordonnées de vecteurs :
   - $\overrightarrow{GH}(x_H-x_G\,;y_H-y_G)$
     $=(3-6\,;3-0{,}5)(-3\,;2{,}5)$
   - $\overrightarrow{KL}(x_L-x_K\,;y_L-y_K)$
     $=(-3-1{,}5\,;2{,}5-3)=(-4{,}5\,;-0{,}5)$
   - $\overrightarrow{MN}(x_N-x_M\,;y_N-y_M)$
     $=(3-(-1{,}5)\,;-2-(-1))=(4{,}5\,;-1)$

Correction 15

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(3-(-4)\,;-4-(-2))$
   $=(3+4\,;-4+2)=(7\,;-2)$
2. a. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{CD}(x_D-x_C\,;y_D-y_C)=(8-1\,;-1-1)=(7\,;-2)$

   b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ayant les mêmes coordonnées, on en déduit que ces deux vecteurs sont égaux.
   Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, on en déduit que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.
3. Voici les points A, B, C, E placés dans le repère ci-dessous pour former un parallélogramme :



Les coordonnées du point E sont : $(-6\,;3)$

Correction 16

Déterminons les coordonnées des vecteurs suivants :
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,;y_B-y_A)=(-0{,}5-2\,;-1-2)$
  $=(-2{,}5\,;-3)$
- $\overrightarrow{DC}(x_C-x_D\,;y_C-y_D)=(-2-0{,}5\,;0{,}5-3{,}5)$
  $=(-2{,}5\,;-3)$

En remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées, on en déduit que ces deux vecteurs sont égaux.

Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction 17

1. Voici les coordonnées de ces cinq points :
   $E(-3\,;1)$; $F(1\,;3)$; $G(6\,;1)$; $H(2\,;-1)$; $L(5\,;5)$
2. a. On a les coordonnées des vecteurs suivants :
   - $\overrightarrow{FL}(x_L-x_F\,;y_L-y_F)$
     $=(5-1\,;5-3)=(4\,;2)$
   - $\overrightarrow{HG}(x_G-x_H\,;y_G-y_H)$
     $=(6-2\,;1-(-1))=(4\,;2)$

   b. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont même coordonnées, on en déduit l'égalité suivante : $\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{HG}$
   On en déduit que le quadrilatère $FLGH$ est un parallélogramme.
3. a. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées :
   $\overrightarrow{EF}(x_F-x_E\,;y_F-y_E)$
   $=(1-(-3)\,;3-1)=(4\,;2)$

   b. D'après les questions précédentes, on a les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{EF}(4\,;2)$; $\overrightarrow{HG}(4\,;2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ayant les mêmes coordonnées, on en déduit que ces deux vecteurs sont égaux.

De l'égalité $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$, on en déduit que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme.

4. De l'égalité de leurs coordonnées, on en déduit l'égalité vectorielles suivante : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FL}$
On en déduit que le point F est le milieu du segment $[EL]$.

5. Par identification des deux vecteurs $\overrightarrow{FL}$ et $\overrightarrow{EF}$, on a l'égalité suviante : $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$.

Le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, on en déduit l'égalité :
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EG}$

On en déduit l'égalité demandée :
$\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG}$

Correction 18

Déterminons les coordonnées des vecteurs suivants :

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = \left(\frac{11}{3} - \frac{5}{3}\,;-\frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right)$
$= \left(\frac{11-5}{3}\,;\frac{-5-7}{4}\right) = \left(\frac{6}{3}\,;\frac{-12}{4}\right) = (2\,;-3)$
- $\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;y_C - y_D) = \left(\frac{16}{7} - \frac{2}{7}\,;\frac{12}{5} - \frac{27}{5}\right)$
$= \left(\frac{16-2}{7}\,;\frac{12-27}{5}\right) = \left(\frac{14}{7}\,;\frac{-15}{5}\right) = (2\,;-3)$

En remarquant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même coordonnées, on en déduit que ces deux vecteurs sont égaux.

Puisque $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, on en déduit que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction 19

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$
$= (-3-2\,;4-(-2)) = (-5\,;6)$

2. Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D\,;y_C - y_D) = (2 - x_D\,;1 - y_D)$

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. On en déduit l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

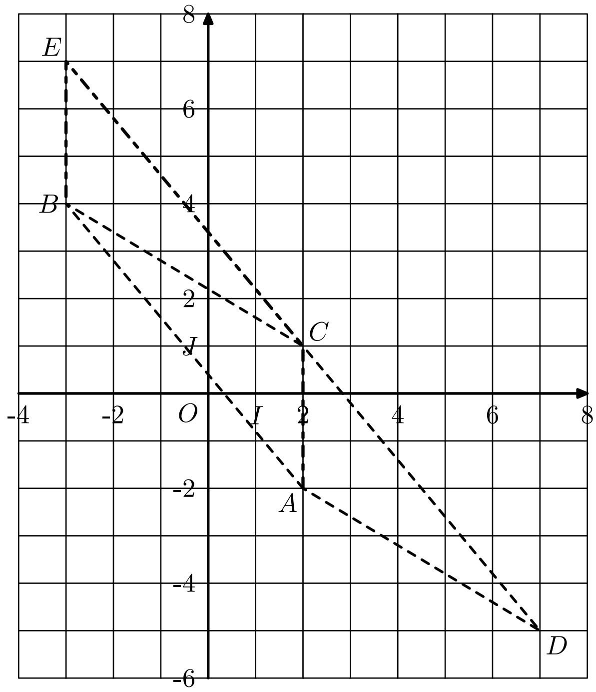
Deux vecteurs égaux ayant les mêmes coordonnées, les égalités des abscisses et des ordonnées de ces deux vecteurs permettent d'obtenir les relations suivantes :
$2 - x_D = -5 \quad ; \quad 1 - y_D = 6$

3. On en déduit les coordonnées du point D :

$2 - x_D = -5$	$1 - y_D = 6$
$-x_D = -5 - 2$	$-y_D = 6 - 1$
$-x_D = -7$	$-y_D = 5$
$x_D = 7$	$y_D = -5$

Le point D a pour coordonnées $D(7\,;-5)$:

Voici la représentation de ces deux quadrilatères :



Correction 20

1. a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A) = (5-3\,;-2-1)$
$= (2\,;-3)$

b. Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{CD}(x_D - x_C\,;y_D - y_C) = (x_D - (-1)\,;y_D - 0)$
$= (x_D + 1\,;y_D - 0)$

De l'égalité $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ et en identifiant les abscisses et les ordonnées des deux membres de l'égalité, on obtient les deux égalités :

$x_D + 1 = 2$	$y_D = -3$
$x_D = 2 - 1$	
$x_D = 1$	

Ainsi, le point D réalisant l'égalité vectorielle a pour coordonnées :
$D(1\,;-3)$

2. Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{EF}(x_F - x_E\,;y_F - y_E) = (25{,}4 - 12{,}1\,;10{,}5 - 34)$
$= (13{,}3\,;-23{,}5)$

Le vecteur $\overrightarrow{HG}$ a pour coordonnées :
$\overrightarrow{HG}(x_G - x_H\,;y_G - y_H)$
$= (30 - x_H\,;-2 - y_H)$

Le quadrilatère $EFGH$ étant un parallélogramme, on doit avoir l'égalité vectorielle :
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$

En identifiant les abscisses et ordonnées des vecteurs des deux membres de cette équation, on obtient les deux égalités :

$30 - x_H = 13{,}3$	$-2 - y_H = -23{,}5$
$-x_H = 13{,}3 - 30$	$-y_H = -23{,}5 + 2$
$-x_H = -16{,}7$	$-y_H = -21{,}5$
$x_H = 16{,}7$	$y_H = 21{,}5$

Les coordonnées du point H sont $H(16{,}7\,;21{,}5)$.

Correction 21

Notons $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées du point D. On a les coordonnées de vecteurs:

- $\overrightarrow{AB}\left(\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right);-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{3};-\frac{5}{5}\right)$

  $=\left(\frac{21}{6}+\frac{2}{6};-1\right)=\left(\frac{23}{6};-1\right)$
- $\overrightarrow{DC}\left(-\frac{5}{3}-x_D\,;2-y_D\right)$

Le quadrilatère $ABCD$ étant un parallélogramme, on en déduit l'égalité vectorielle:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Ainsi, leurs coordonnées sont égaltes. On obtient les deux égalités:

$$\begin{aligned}-\frac{5}{3}-x_D&=\frac{23}{6}\\ -x_D&=\frac{23}{6}+\frac{5}{3}\\ -x_D&=\frac{23}{6}+\frac{10}{6}\\ -x_D&=\frac{33}{6}\\ x_D&=-\frac{11}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2-y_D&=-1\\ -y_D&=-1-2\\ -y_D&=-3\\ y_D&=3\end{aligned}$$

Le point D a pour coordonnées $\left(-\frac{11}{2};3\right)$.