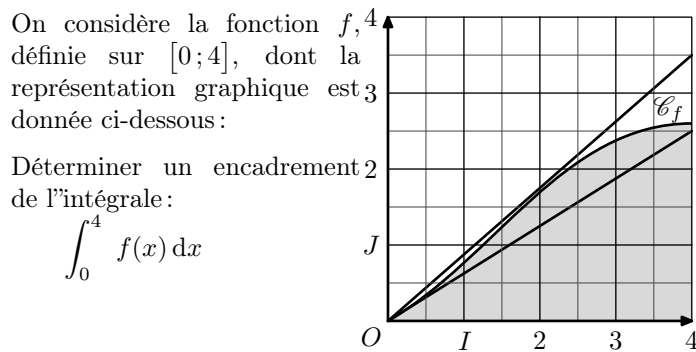


Tspé - Exercices Calcul intégral

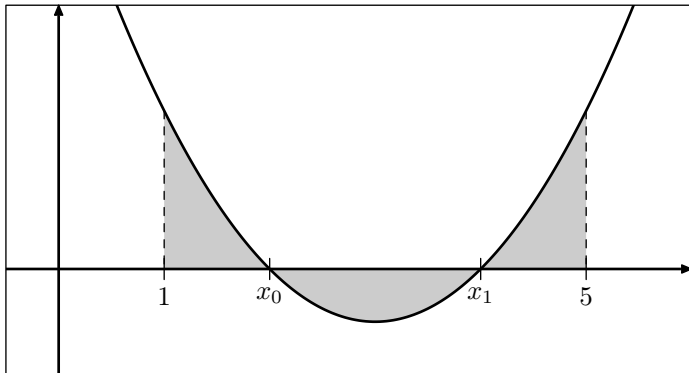
E.1



E.2 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

- 1 Déterminer la valeur de l'intégrale : $\int_1^5 f(x) dx$.
- 2 Ci-dessous est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer la valeur de l'aire de la partie présentée en gris.

- a Déterminer les zéros de la fonction f qu'on notera x_0 et x_1 tels que $x_0 < x_1$.
- b Déterminer la valeur de : $\int_1^{x_0} f(x) dx + \int_{x_1}^5 f(x) dx$
- c Déterminer la valeur de : $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$
- d En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie grisée.

E.3 Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0; 1]$.

Dire si la proposition suivante est exacte ou non. Justifier votre réponse.

Si $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

E.4 On munit le plan du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé d'unité graphique 3 cm.

On considère la fonction f définie sur $[1; e]$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

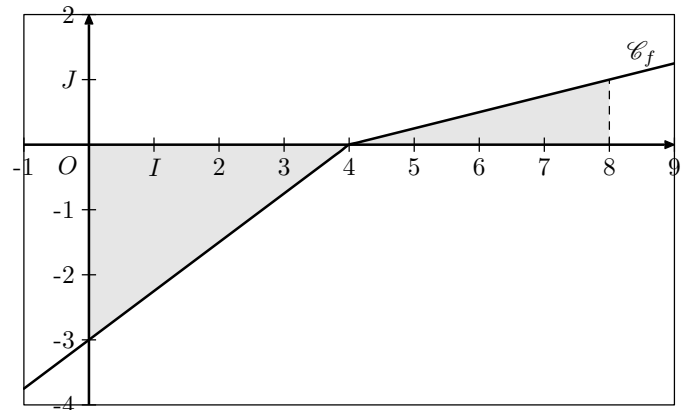
1 Montrer que : $\int_1^e f(x) dx = \frac{1}{2}$.

- 2 En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.
On exprimera cette aire en cm^2 .

E.5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 - \frac{1}{4}|x - 4|$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer l'aire de la partie hachurée.

- 1 Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des intervalles $[0; 4]$ et $[4; 8]$.
- 2 Déterminer l'aire de la surface grisée.

E.6 Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|------------------------------------|---|
| a $\int_{-3}^2 x + 1 dx$ | b $\int_0^5 (2x - 5)^2 dx$ |
| c $\int_{-3}^1 (1 - x)^3 dx$ | d $\int_1^4 \frac{x}{(2x^2 + 1)^2} dx$ |
| e $\int_4^6 \frac{2x}{x^2 - 3} dx$ | f $\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx$ |

E.7 Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|----------------------------------|---|
| a $\int_4^5 \frac{\ln x}{x} dx$ | b $\int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx$ |
| c $\int_{-1}^3 \frac{1}{x+4} dx$ | d $\int_{-1}^1 x^2 \cdot (2x^3 + 2)^2 dx$ |

E.8 On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

- 1 Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :
 $H(x) = -(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$
Calculer la dérivée H' de la fonction H .
- 2 En déduire une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction g .

- ③ En déduire la valeur de l'intégrale: $\int_0^1 g(x) dx$

E.9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

- ① Démontrer que, pour tout réel x : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

- ② On définit le nombre: $I = \int_0^1 f(x) dx$.

Montrer que: $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Donner une interprétation graphique de I .

E.10 On considère les deux intégrales suivantes:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

- ① Justifier l'égalité: $I + J = 1$.
- ② a) Déterminer la valeur de l'intégrale I .
- b) En déduire la valeur de l'intégrale J .

E.11 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx$$

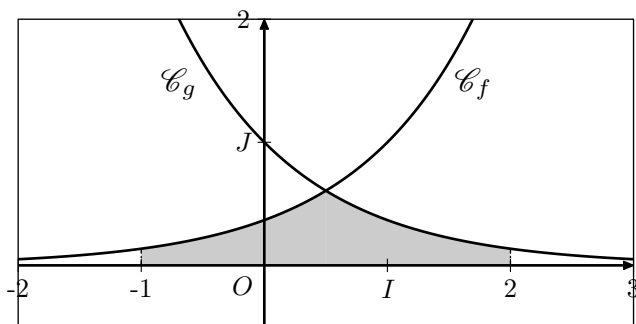
- ① Montrer que: $u_0 + u_1 = 1$
- ② Montrer que, pour tout entier naturel n non-nul:

$$u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

E.12 On considère les deux fonctions f et g définies par:

$$f(x) = e^{x-1} \quad ; \quad g(x) = e^{-x}$$

Dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .



Le domaine grisé ci-dessus est définie par:

- il est situé entre les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
- il est situé au-dessus de l'axe des abscisses.
- il est situé sous les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Déterminer l'aire de ce domaine.

E.13 Soit n un entier naturel. On note f_n , la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par:

$$f_n(x) = \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}}$$

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

- ① Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0 .

- ② Démontrer que, pour tout entier n :

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-n \cdot x} dx$$

- ③ Calculer l'intégrale: $\int_0^1 e^{-n \cdot x} dx$

En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.