

Tspé - Exercices Calcul intégral

CORRECTION

C.1 Les deux segments reliant l'origine à la droite d'équation $y=4$ permettent d'encadrer l'aire grisée définie par :

- l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$;
- les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.

Ainsi, on a l'encadrement :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &\leq \int_0^4 f(x) dx \leq \mathcal{A}_2 \\ \frac{4 \times \frac{5}{2}}{2} &\leq \int_0^4 f(x) dx \leq \frac{4 \times \frac{7}{2}}{2} \\ 5 &\leq \int_0^4 f(x) dx \leq 7 \end{aligned}$$

C.2

- 1** La fonction f admet pour primitive la fonction F dont l'expression est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + 4x \\ &= \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^5 f(x) dx &= \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_1^5 \\ &= \left(\frac{1}{6} \times 5^3 - \frac{3}{2} \times 5^2 + 4 \times 5 \right) - \left(\frac{1}{6} \times 1^3 - \frac{3}{2} \times 1^2 + 4 \times 1 \right) \\ &= \frac{125}{6} - \frac{75}{2} + 20 - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} + 4 \right) \\ &= \frac{125 - 225 + 120}{6} - \frac{1 - 9 + 24}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- 2 a** L'expression de la fonction f est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 4 = 9 - 8 = 1$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \\ = \frac{-(-3) - 1}{2 \times \frac{1}{2}} & = \frac{-(-3) + 1}{2 \times \frac{1}{2}} \\ = \frac{3 - 1}{1} & = \frac{3 + 1}{1} \\ = 2 & = 4 \end{array}$$

- b** Déterminons séparément la valeur des deux intégrales :

$$\begin{aligned} \bullet \int_1^{x_0} f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{6} \times 2^3 - \frac{3}{2} \times 2^2 + 4 \times 2 \right) - \left(\frac{1}{6} \times 1^3 - \frac{3}{2} \times 1^2 + 4 \times 1 \right) \\ &= \left(\frac{8}{6} - \frac{12}{2} + 8 \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2} + 4 \right) \\ &= \frac{8 - 36 + 48 - 1 + 9 - 24}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \int_{x_1}^5 f(x) dx &= \int_4^5 f(x) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_4^5 \\ &= \left(\frac{1}{6} \times 5^3 - \frac{3}{2} \times 5^2 + 4 \times 5 \right) - \left(\frac{1}{6} \times 4^3 - \frac{3}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 \right) \\ &= \left(\frac{125}{6} - \frac{75}{2} + 20 \right) - \left(\frac{64}{6} - \frac{48}{2} + 16 \right) \\ &= \frac{125 - 225 + 120 - 64 + 144 - 96}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- c** Effectuons le calcul de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_2^4 f(x) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{1}{6} \times 4^3 - \frac{3}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 \right) - \left(\frac{1}{6} \times 2^3 - \frac{3}{2} \times 2^2 + 4 \times 2 \right) \\ &= \left(\frac{64}{6} - \frac{48}{2} + 16 \right) - \left(\frac{8}{6} - \frac{12}{2} + 8 \right) \\ &= \frac{64 - 144 + 96 - 8 + 36 - 48}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

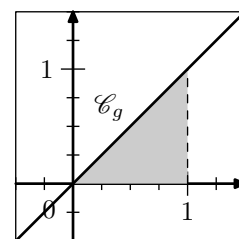
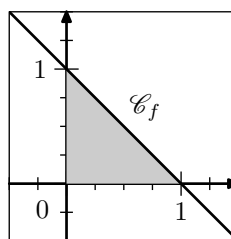
- d** Ainsi, la surface hachurée a pour valeur :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx - \left[\int_2^4 f(x) dx \right] \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

La partie hachurée a une aire de 2 unités d'aire.

C.3 Considérons les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 1 - x \quad ; \quad g(x) = 1$$



On montre facilement l'égalité des deux intégrales :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'assertion proposée est fausse.

C.4

- 1** Considérons la fonction u est définie par l'expression :

$$u(x) = \ln x$$

qui admet pour dérivée l'expression :

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

Ainsi, on a le calcul intégral suivant :

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \ln x dx \\ &= \int_1^e u'(x) \cdot u(x) dx = \left[\frac{1}{2} [u(x)]^2 \right]_1^e = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x)^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(e)^2 - \frac{1}{2} \cdot \ln(1)^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 2** La fonction f étant positive sur l'intervalle $[1; e]$, l'intégrale, calculée à la question précédente, permet de définir, en unité d'aire, l'aire délimitée par :

- L'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$;

- les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ étant orthonormé et d'unité graphique 3 cm , on en déduit, que dans ce repère, une unité d'aire a une surface de 9 cm^2 .

Ainsi, l'aire recherchée a une valeur de $\frac{9}{2}\text{ cm}^2$.

C.5

- 1 L'expression $x-4$ est positive sur $[4; +\infty[$. On en déduit :

- sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction f admet pour expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot |x - 4| = \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot [-(x - 4)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot (4 - x) = \frac{1}{2} \cdot x - 2 - 1 + \frac{1}{4} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot x - 3 \end{aligned}$$

Montrons que la fonction f est négative sur cet intervalle. Soit $x \in [0; 4]$:

$$x \leq 4$$

$$\frac{3}{4} \cdot x \leq \frac{3}{4} \cdot 4$$

$$\frac{3}{4} \cdot x \leq 3$$

$$\frac{3}{4} \cdot x - 3 \leq 3 - 3$$

$$f(x) \leq 0$$

- sur l'intervalle $[4; 8]$, la fonction f admet pour expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot |x - 4| = \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \\ &= \frac{1}{2} \cdot x - 2 - \frac{1}{4} \cdot x + 1 = \frac{1}{4} \cdot x - 1 \end{aligned}$$

Montrons que la fonction f est positive sur l'intervalle $[4; 8]$. Soit $x \in [4; 8]$:

$$x \geq 4$$

$$\frac{1}{4} \cdot x \geq 4 \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot x \geq 1$$

$$\frac{1}{4} \cdot x - 1 \geq 1 - 1$$

$$f(x) \geq 0$$

- 2 Étant négative sur $[0; 4]$ et positive sur $[4; 8]$, l'aire grisée est obtenue par le calcul :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_4^8 f(x) \, dx - \int_0^4 f(x) \, dx \\ &= \int_4^8 \frac{1}{4} \cdot x - 1 \, dx - \int_0^4 \frac{3}{4} \cdot x - 3 \, dx \\ &= \left[\frac{1}{8} \cdot x^2 - x \right]_4^8 - \left[\frac{3}{8} \cdot x^2 - 3x \right]_0^4 \\ &= \left[\left(\frac{1}{8} \times 8^2 - 8 \right) - \left(\frac{1}{8} \times 4^2 - 4 \right) \right] \\ &\quad - \left[\left(\frac{3}{8} \times 4^2 - 3 \times 4 \right) - \left(\frac{3}{8} \times 0^2 - 3 \times 0 \right) \right] \\ &= [(8 - 8) - (2 - 4)] - [(3 \times 2 - 12) - (0 - 0)] \\ &= 2 + 6 = 8 \end{aligned}$$

C.6

- a La fonction f définit par :

$$f(x) = x + 1$$

qui admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + x$$

Ainsi, on a le calcul intégral suivant :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^2 x + 1 \, dx &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 + x \right]_{-3}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 \right) - \left[\frac{1}{2} \times (-3)^2 + (-3) \right] \\ &= \frac{4}{2} + 2 - \frac{9}{2} + 3 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- b Considérons la fonction u est définie par :

$$u(x) = 2 \cdot x - 5 \quad ; \quad u'(x) = 2$$

Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = (2x - 5)^2$$

qui admet pour expression :

$$= \frac{1}{2} \times 2 \cdot (2x - 5)^2 = \frac{1}{2} \times u'(x) \cdot [u(x)]^2$$

La fonction g admet pour primitive la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 = \frac{1}{6} \cdot (2x - 5)^3$$

On a le calcul intégral suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^5 (2 \cdot x - 5) \, dx &= \left[\frac{1}{6} \cdot (2 \cdot x - 5)^3 \right]_0^5 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2 \times 5 - 5)^3 - \frac{1}{6} \cdot (2 \times 0 - 5)^3 \\ &= \frac{1}{6} \times 5^3 + \frac{1}{6} \times 5^3 = \frac{2}{6} \times 125 = \frac{125}{3} \end{aligned}$$

- c Considérons la fonction u est définie par :

$$u(x) = 1 - x \quad ; \quad u'(x) = -1$$

Considérons la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 - x)^3 = -1 \times (-1) \cdot (1 - x)^3 \\ &= -1 \times u'(x) \cdot [u(x)]^3 \end{aligned}$$

La fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :

$$H(x) = -1 \times \frac{1}{4} \cdot [u(x)]^4 = -\frac{1}{4} \cdot (1 - x)^4$$

On a le calcul intégral suivant :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 (1 - x)^3 \, dx &= \left[-\frac{1}{4} \cdot (1 - x)^4 \right]_{-3}^1 \\ &= -\frac{1}{4} \cdot (1 - 1)^4 - \left[-\frac{1}{4} \cdot [1 - (-3)]^4 \right] \\ &= -\frac{1}{4} \times 0^4 + \frac{1}{4} \times 4^4 = 4^3 = 64 \end{aligned}$$

- d Soit u la fonction définie par :

$$u(x) = 2 \cdot x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 4 \cdot x$$

Considérons la fonction j définie par :

$$j(x) = \frac{x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

La fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :

$$J(x) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{2x^2 + 1} \right) = -\frac{1}{4 \cdot (2x^2 + 1)}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\int_1^4 \frac{x}{(2x^2+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{4(2x^2+1)} \right]_1^4$$

$$= -\frac{1}{4(2 \times 4^2+1)} - \left[-\frac{1}{4(2 \times 1^2+1)} \right] = -\frac{1}{4 \times 33} + \frac{1}{4 \times 3}$$

$$= \frac{-1+1 \times 11}{4 \times 33} = \frac{10}{132}$$

e) Notons u la fonction définie par :

$$u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad u'(x) = 2x$$

Considérons la fonction k définie par :

$$k(x) = \frac{2x}{x^2-3} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La fonction k admet pour primitive la fonction K définie par :

$$K(x) = \ln[u(x)] = \ln(x^2 - 3)$$

Ainsi, on a le calcul intégral suivant :

$$\int_4^6 \frac{2x}{x^2-3} dx = [\ln(x^2-3)]_4^6 = \ln(6^2-3) - \ln(4^2-3)$$

$$= \ln(33) - \ln(13) = \ln\left(\frac{33}{13}\right)$$

f) Considérons la fonction L définie par :

$$L(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$$

qui admet pour dérivée :

$$L'(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Ainsi, on a le calcul intégral suivant :

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{x} - \ln x \right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \ln 3 \right) - \left(-\frac{1}{1} - \ln 1 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \ln 3 + \frac{1}{1} + \ln 1 = \frac{2}{3} - \ln 3$$

C.7

a) Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x$$

En notant u la fonction logarithme, on a :

$$f(x) = u'(x) \cdot u(x)$$

La fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot [u(x)]^2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln x)^2 = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

On a le calcul intégral suivant :

$$\int_4^5 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_4^5 = \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 4)^2}{2}$$

$$= \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{(\ln 2^2)^2}{2} = \frac{(\ln 5)^2}{2} - \frac{2 \ln 2}{2}$$

$$= \frac{(\ln 5)^2}{2} - 4(\ln 2)^2$$

b) Notons u la fonction définie par :

$$u(x) = x + 3 \quad ; \quad u'(x) = 1$$

Considérons la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

qui admet pour expression :

$$= \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

Ainsi, on a le calcul intégral :

$$\int_{-2}^4 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx = [2\sqrt{x+3}]_{-2}^4$$

$$= 2\sqrt{4+3} - 2\sqrt{-2+3} = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{7} - 2$$

c) En notant u la fonction définie par :

$$u(x) = x + 4 \quad ; \quad u'(x) = 1$$

Considérons la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{x+4}$$

qui admet pour expression :

$$= \frac{u'(x)}{u(x)}$$

La fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :

$$H(x) = \ln[u(x)] = \ln(x+4)$$

On a le calcul intégral suivant :

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x+4} dx = [\ln u(x)]_{-1}^3 = [\ln(x+4)]_{-1}^3$$

$$= \ln(3+4) - \ln(-1+4) = \ln(7) - \ln(3) = \ln \frac{7}{3}$$

d) Considérons la fonction u définie par :

$$u(x) = 2x^3 + 2 \quad ; \quad u'(x) = 6x^2$$

Considérons la fonction j définie par :

$$j(x) = x^2 \cdot (2x^3 + 2)^2$$

qui admet pour expression :

$$= \frac{1}{6} \times 6x^2 \cdot (2x^3 + 2)^2 = \frac{1}{6} \times u'(x) \cdot [u(x)]^2$$

La fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :

$$J(x) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 = \frac{1}{18} (2x^3 + 2)^3$$

Ainsi, on a le calcul intégral :

$$\int_{-1}^1 x^2 \cdot (2x^3 + 2)^2 dx = \left[\frac{1}{18} (2x^3 + 2)^3 \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{18} (2 \times 1^3 + 2)^3 - \frac{1}{18} [2 \times (-1)^3 + 2]^3 = \frac{64}{18} - \frac{1}{18} \times 0$$

$$= \frac{64}{18} = \frac{32}{9}$$

C.8

1) L'expression de la fonction H est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où :

$$u(x) = -(x^2 + 2x) \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = -2x - 2 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée H' :

$$H'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= (-2x - 2) \cdot e^{-x} + [-(x^2 + 2x)] \cdot (-e^{-x})$$

$$= (-2x - 2) \cdot e^{-x} + (x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$$

$$= [(-2x - 2) + (x^2 + 2x)] \cdot e^{-x} = (x^2 - 2) \cdot e^{-x}$$

$$= x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}$$

2) Pour obtenir la primitive de la fonction g , utilisons les résultats de la question précédente et notamment l'expression de la fonction H' .

Considérons la fonction G définie par la relation :

$$G(x) = H(x) - 2 \cdot e^{-x}$$

La fonction G admet pour dérivée la fonction G' dont l'expression est donnée par :

$$G'(x) = H'(x) - 2 \cdot (-e^{-x}) = H'(x) + 2 \cdot e^{-x} \\ = x^2 \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot e^{-x} = x^2 \cdot e^{-x} = g(x)$$

La fonction G , ainsi définie, est une primitive de la fonction g .

③ On a le calcul intégral suivant :

$$\int_0^1 g(x) dx = [G(x)]_0^1 = [-(x^2 + 2x) \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}]_0^1 \\ = -(1^2 + 2 \times 1) \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{-1} - [-(0^2 + 2 \times 0) \cdot e^{-0} - 2 \cdot e^{-0}] \\ = -3 \cdot e^{-1} - 2 \cdot e^{-1} - (0 \times 1 - 2 \times 1) = -5 \cdot e^{-1} + 2$$

C.9

① On a les transformations algébriques :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1 \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x}{e^x + e^0} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

② L'expression de la fonction f peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

où la fonction u est définie par :

$$u(x) = e^x + 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$$

Ainsi, la fonction f admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :

$$F(x) = \ln[u(x)] = \ln(e^x + 1)$$

On en déduit le calcul intégral :

$$I = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = \ln(e^1 + 1) - \ln(e^0 + 1)$$

$$= \ln(e + 1) - \ln(1 + 1) = \ln(e + 1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

La fonction f étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le calcul intégral I correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f de l'axe des abscisses et des deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

C.10

① Effectuons le calcul de cette somme :

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

② a) Considérons la fonction u définie par :

$$u(x) = e^x + 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$$

Ainsi, on obtient le calcul intégral suivant :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = [\ln[u(x)]]_0^1$$

$$= [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e^1 + 1) - \ln(e^0 + 1)$$

$$= \ln(e + 1) - \ln 2 = \ln \frac{e+1}{2}$$

b) On en déduit la valeur de l'intégrale J :

$$I + J = 1$$

$$J = 1 - I = 1 - \ln \frac{e+1}{2}$$

C.11

① On a les égalités suivantes :

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot 0}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-1 \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

② Pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1) \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1) \cdot x}}{1 + e^{-x}} + \frac{e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1) \cdot x} + e^{-n \cdot x}}{1 + e^{-x}} dx \\ = \int_0^1 e^{-n \cdot x} \cdot \frac{e^{-x} + 1}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-n \cdot x} dx \\ = \left[-\frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot x} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot 1} + \frac{1}{n} \cdot e^{-n \cdot 0} \\ = -\frac{1}{n} \cdot e^{-n} + \frac{1}{n} \cdot e^0 = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

C.12 Déterminons l'abscisse du point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

$$f(x) = g(x)$$

$$e^{x-1} = e^{-x}$$

$$\frac{e^{x-1}}{e^{-x}} = 1$$

$$e^{x-1-(-x)} = 1$$

$$e^{2x-1} = 1$$

$$\ln(e^{2x-1}) = \ln(1)$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Considérons les deux fonctions F et G définies par :

$$F(x) = e^{x-1} \quad ; \quad G(x) = -e^{-x}$$

$$\bullet F'(x) = e^{x-1}$$

$$\bullet G'(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$$

Ainsi, les fonctions F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g .

On décompose le domaine considéré en deux sous-domaines :

• Le domaine $\mathcal{D}_1$ est défini par :

➡ la courbe $\mathcal{C}_f$ et la courbe des abscisses,

➡ les droites d'équations $x=-1$ et $x=\frac{1}{2}$.

L'aire de ce domaine est définie par :

$$\mathcal{A}_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(-1)$$

$$= e^{\frac{1}{2}-1} - e^{-1-1} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2}$$

• Le domaine $\mathcal{D}_2$ est défini par :

➡ la courbe $\mathcal{C}_g$ et la courbe des abscisses,

➡ les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 2$.

L'aire de ce domaine est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 g(x) dx = G(2) - G\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (-e^{-2}) - (-e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2}\end{aligned}$$

On en déduit l'aire du domaine considérée :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = (e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2}) + (e^{-\frac{1}{2}} - e^{-2}) \\ &= 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot e^{-2}\end{aligned}$$

C.13

① Déterminons la valeur de u_1 définie par :

$$u_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

Considérons la fonction v définie par :

$$v(x) = 1 + e^{-x}$$

qui admet pour dérivée :

$$v'(x) = -e^{-x}$$

Ainsi, on a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 -\frac{u'(x)}{u(x)} dx \\ &= [-\ln [v(x)]]_0^1 = [-\ln (1+e^{-x})]_0^1 \\ &= -\ln (1+e^{-1}) + \ln (1+e^{-0}) = \ln 2 - \ln (1+e^{-1})\end{aligned}$$

Étudions la somme suivante :

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

De l'égalité précédente, on en déduit la valeur de u_0 :

$$\begin{aligned}u_0 + u_1 &= 1 \\ u_0 &= 1 - u_1 \\ u_0 &= 1 - [\ln 2 - \ln (1+e^{-1})] \\ u_0 &= 1 - \ln 2 + \ln (1+e^{-1})\end{aligned}$$

② Établissons les deux comparaisons de l'encadrement recherché :

• La fonction f_n est définie par le quotient :

$$f_n(x) = \frac{e^{-n \cdot x}}{1+e^{-x}}$$

On remarque facilement que le numérateur et le dénominateur de ce quotient sont positifs : la fonction f_n est positive sur $[0; 1]$.

$$f_n(x) \geq 0$$

Comme $0 \leq 1$, la positivité de l'intégrale permet d'affirmer :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x) dx &\geq 0 \\ u_n &\geq 0\end{aligned}$$

• La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, on a :

$$e^{-x} \geq 0$$

$$1 + e^{-x} \geq 1$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} \leq \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1+e^{-x}} \leq 1$$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{e^{-n \cdot x}}{1+e^{-x}} \leq e^{-n \cdot x}$$

Comme $0 \leq 1$, la positivité de l'intégrale permet d'affirmer :

$$\int_0^1 \frac{e^{-n \cdot x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-n \cdot x} dx$$

$$u_n \leq \int_0^1 e^{-n \cdot x} dx$$

③ On a le calcul intégral suivant :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-n \cdot x} dx &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{n}\right) \cdot (-n \cdot e^{-n \cdot x}) dx \\ &= -\frac{1}{n} \cdot \int_0^1 -n \cdot e^{-n \cdot x} dx = -\frac{1}{n} \cdot [e^{-n \cdot x}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n} \cdot (e^{-n \cdot 1} - e^{-n \cdot 0}) = -\frac{1}{n} \cdot (e^{-n} - 1)\end{aligned}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} - 1 = -1$$

On en déduit la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-n \cdot x} dx = 0$

Or, de l'encadrement de la question ② et de la limite obtenue précédemment, on en déduit, d'après le théorème des gendarmes, la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$