

Fonctions trigonométriques

I Cercle trigonométrique - Rappels

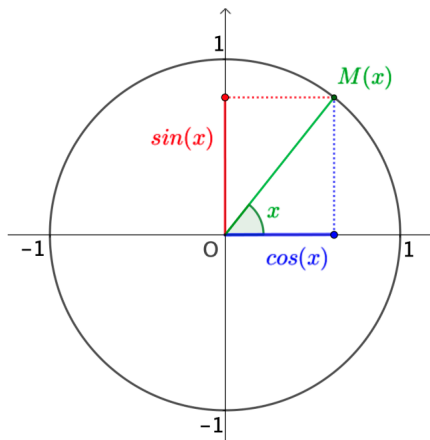
1) Définitions et propriétés

Définition 1

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est l'angle orienté).

- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on le note $\cos(x)$

- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on le note $\sin(x)$



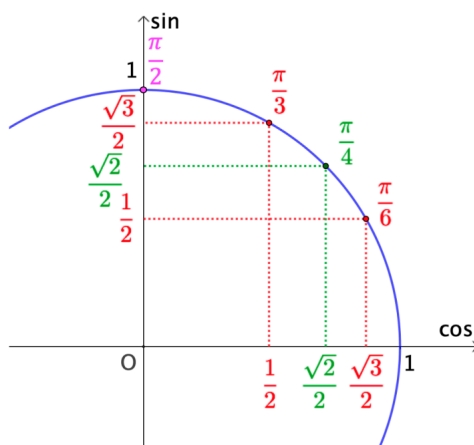
Propriété 1

1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2) Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Exemple 1

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$

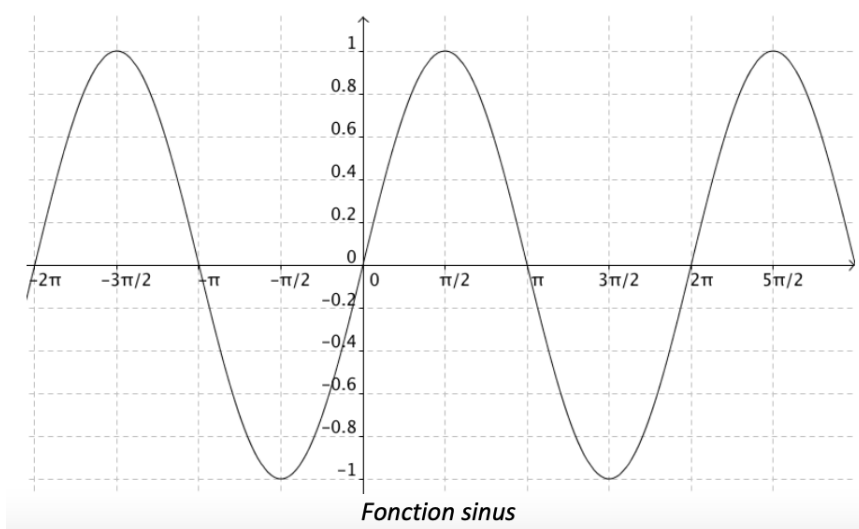
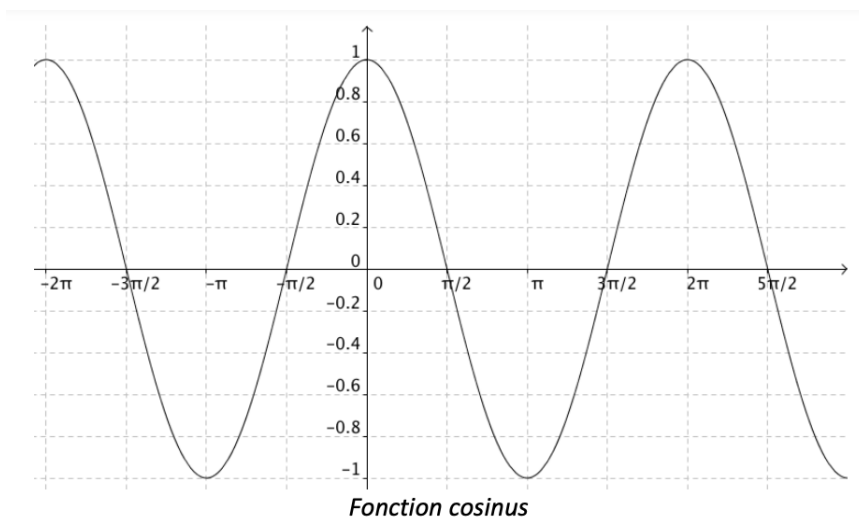
2) Résoudre sur $] -\pi; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

II Propriétés des fonctions cosinus et sinus

1) Définitions

Définition 2

- **La fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\cos(x)$
- **La fonction sinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $\sin(x)$



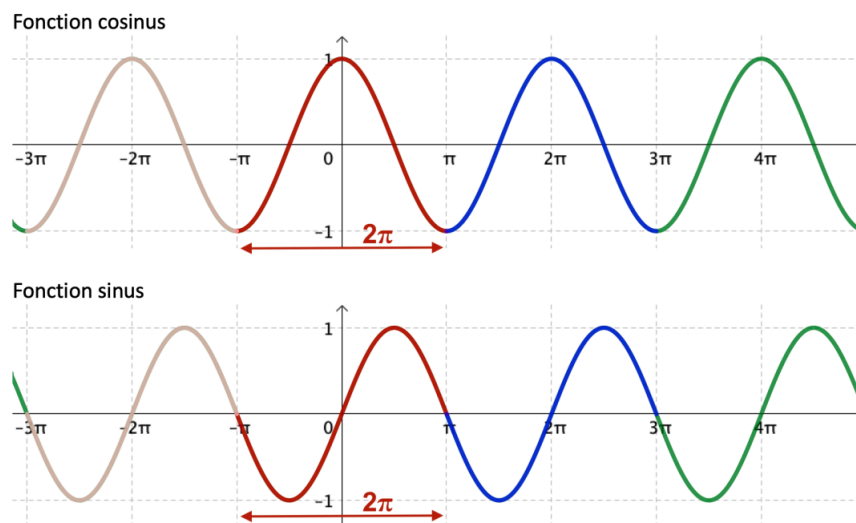
2) Périodicité

Propriété 2

- 1) $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ où k est un entier relatif
- 2) $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ où k est un entier relatif

Remarque

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **2π périodiques** (périodiques de période 2π)
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π



3) Parité

Définition 3

Rappels

- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est appelée une **fonction paire**
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est appelée une **fonction impaire**

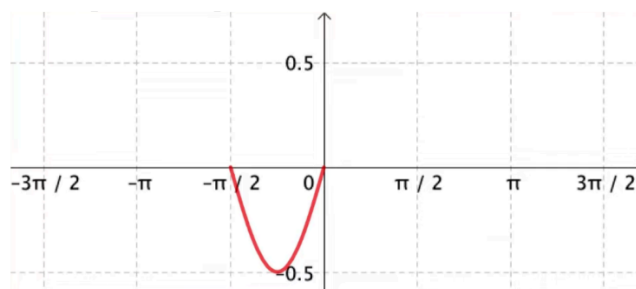
Remarque

- Pour une **fonction paire** on a $f(-x) = f(x)$
- Pour une **fonction impaire** on a $f(-x) = -f(x)$

Exercice 1

- 1) Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(5x)$ est impaire.

- 2) Soit g une fonction impaire et π périodique. Compléter sa représentation graphique sur $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$



III Variations des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées

Fonction	Dérivée
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(ax + b)$ a et b réels	$-a \sin(ax + b)$
$\sin(ax + b)$ a et b réels	$a \cos(ax + b)$

2) Tableaux de variations

x	0	π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	0
$\cos(x)$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x) = \cos(x)$	+	0	-
$\sin(x)$	0	1	0

3) Représentation graphique

- On retrouve la représentation graphique de la fonction cosinus en complétant les données du tableau de variations
 - * Par symétrie avec l'axe des ordonnées (la fonction cosinus est paire)
 - * Par translation (la fonction cosinus est 2π périodique)
- On retrouve la représentation graphique de la fonction sinus en complétant les données du tableau de variations
 - * Par symétrie avec l'origine du repère (la fonction sinus est impaire)
 - * Par translation (la fonction sinus est 2π périodique)

Exercice 2 (Etudier une fonction trigonométrique)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$

- 1) Etudier la parité de f
- 2) Démontrer que f est π périodique
- 3) Etudier les variations de f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$
- 4) Représenter graphiquement la fonction f sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et translation.