

Terminale spécialité - Exercices fonctions Trigonométriques

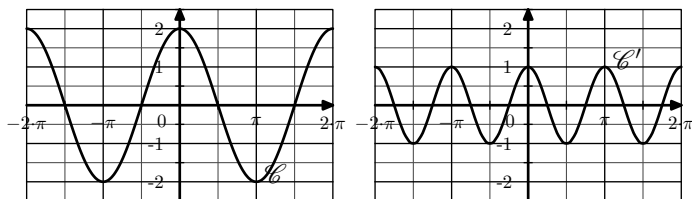
E.1 Résoudre, dans $]-\pi; \pi]$, les équations ci-dessous :

- a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$ b) $\sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$
 c) $\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{4}$ d) $\cos x = \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

E.2 On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \cos(2 \cdot x)$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



E.3 Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

- a) $f(x) = \sin(6x-3)$; $T = \frac{\pi}{3}$
 b) $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $T = \pi$
 c) $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$; $T = \pi$
 d) $f(x) = \left| \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right|$; $T = \frac{\pi}{2}$

E.4 Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

- a) $f: x \mapsto x^2 + \cos x$ b) $g: x \mapsto \sin(2x)$
 c) $h: x \mapsto \cos x \cdot \sin x$ d) $j: x \mapsto (\sin x)^2$

E.5 Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

- a) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$ b) $g(x) = (3x^2 - 2) \cdot (\sin x)^2$
 c) $h(x) = \frac{3}{2 \cdot \cos x}$ d) $j(x) = \frac{\cos x}{3x + \sin x}$

E.6

1) On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0; \pi]$ par :

$$g(x) = x \cdot \cos x - \sin x$$

Étudier g et dresser son tableau de variation.

En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; \pi]$.

2) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; \pi[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{pour } x \in]0; \pi[\end{cases}$$

On rappelle que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Étudier les variations de f sur $]0; \pi]$.

3) Étude de f en 0.

a) Prouver que, pour tout nombre réel $x \in [0; \pi]$:

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

(Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0; \pi]$ par :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

On calculera les dérivées φ' , φ'' et φ''' et on en déduira le signe de φ)

b) Prouver que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

4) Construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prendra 3 cm pour unité).

E.7 Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Affirmation

L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

E.8 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \cos x + \sin x$ b) $g(x) = \sin(3x)$
 c) $h(x) = \sin x \cdot \cos x$ d) $j(x) = 3x \cdot \cos(x^2)$

E.9 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$ b) $g(x) = e^{x+1} + 1$
 c) $h(x) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+1}$ d) $j(x) = \cos x$
 e) $k(x) = \sin(3x)$ f) $\ell(x) = (\sin x)^2$

E.10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E.11

1) Résoudre dans l'ensemble $]-\pi; \pi]$ des mesures principales, les équations suivantes :

- a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{1}{2}$
 c) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos x = -\frac{1}{2}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

E.12 Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales :

(a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

E.13 Dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ des mesures principales, résoudre les deux équations suivantes :

(a) $\cos(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$ (b) $\sin(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

E.14 Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot \cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2 Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathcal{C}$.

3 On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4 (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot [\cos(4x) + 4 \cdot \sin(4x)]$$

(b) En déduire que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5 Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

