

# Terminale spécialité - Exercices fonctions Trigonométriques

C.1

- a Les solutions de l'équation  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$  doivent vérifier une des équations suivantes :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad \left| \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

Ainsi, on en déduit que la mesure principale de  $x$  doit appartenir à l'ensemble :

$$\left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\}$$

- b Les solutions de l'équation  $\sin x = \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right)$  doivent vérifier une des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi & \quad \left| \quad x = \pi - \left( -\frac{\pi}{6} \right) + 2 \cdot k \cdot \pi \right. \\ & = \pi + \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = \frac{7\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = -\frac{5\pi}{6} + 2 \cdot k' \cdot \pi \end{aligned}$$

Ainsi, les mesures principales des solutions de cette équation doivent appartenir à l'ensemble :

$$\left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right\}$$

- c Les solutions de l'équation  $\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{4}$  doivent vérifier une des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} 2x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & \quad \left| \quad 2x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \right. \\ x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi & \quad \left| \quad x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \right. \end{aligned}$$

- Les mesures principales des solutions de l'équation de gauche peuvent avoir pour valeur :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{8} \\ x &= \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8} = -\frac{7\pi}{8} \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{aligned}$$

- Les mesures principales des solutions de l'équation de droite peuvent avoir pour valeur :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{8} \\ x &= -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8} \end{aligned}$$

Ainsi, les mesures principales de cette équation appartiennent à l'ensemble :

$$\left\{ -\frac{7\pi}{8}; -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\}$$

- d Les solutions de l'équation  $\cos x = \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$  doivent vérifier une des deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} x = x + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & \quad \left| \quad x = -x - \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \right. \\ 0 \cdot x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & \quad \left| \quad 2 \cdot x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \right. \\ & \quad \left| \quad x = -\frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \right. \end{aligned}$$

La première équation n'admet aucune solution ; les mesures principales de la seconde équation peuvent valoir :

- $k=0 \implies x = -\frac{\pi}{8}$
- $k=1 \implies x = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$

Ainsi, les solutions de cette équation ont pour mesure

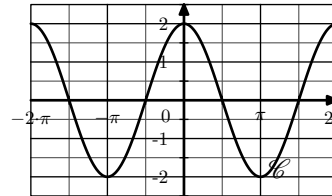
principale :

$$\left\{ -\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\}$$

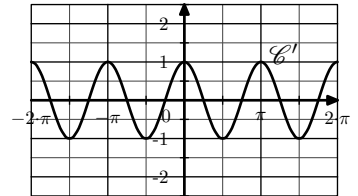
- C.2 Pour choisir entre les deux représentations, il suffit de calculer l'image de 0 par chacune de ces fonctions :

- $f(0) = 2 \cdot \cos(0) = 2 \times 1 = 2$
- $g(0) = \cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$

Voici l'association :



$$f(x) = 2 \cdot \cos(x)$$



$$g(x) = \cos(2 \cdot x)$$

Remarquer que la période de la fonction  $g$  est de  $\pi$  et celle de la fonction  $f$  est  $2\pi$ .

C.3

- a Vérifions que  $\frac{\pi}{3}$  est une période de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left[6 \cdot \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3\right] \\ &= \sin(6 \cdot x + 2\pi - 3) = \sin(6 \cdot x - 3 + 2\pi) \\ &= \sin(6 \cdot x - 3) = f(x) \end{aligned}$$

- b Vérifions que  $T = \pi$  est une période de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= \tan\left[2 \cdot (x + \pi) + \frac{\pi}{3}\right] = \tan\left(2 \cdot x + 2 \cdot \pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \tan\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi\right) = \tan\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) = f(x) \end{aligned}$$

- c Vérifions que  $T = \pi$  est une période de la fonction  $f$  :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= [\cos(x + \pi)]^2 - [\sin(x + \pi)]^2 \\ &= [-\cos(x)]^2 - [-\sin(x)]^2 \\ &= [\cos(x)]^2 - [\sin(x)]^2 = f(x) \end{aligned}$$

- d Vérifions que  $T = \frac{\pi}{2}$  a bien pour période  $\frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \left| \cos\left[2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] \right| \\ &= \left| \cos\left(2 \cdot x + \pi + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \cos\left[\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) + \pi\right] \right| \\ &= \left| -\cos\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \cos\left(2 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) \right| = f(x) \end{aligned}$$

C.4

- a La fonction  $f$  admet pour dérivée :

$$f'(x) = 2x + (-\sin x) = 2x - \sin x$$

- b La fonction  $g$  est définie par la composée de la fonction  $u$  par la fonction sinus où :

$$u(x) = 2x \quad ; \quad u'(x) = 2$$

La formule de dérivation de la fonction sinus donne l'expression de la fonction  $g$  :

$$g'(x) = u'(x) \cdot \cos[u(x)] = 2 \cdot \cos(2x)$$

- c La fonction  $h$  est définie par le produit des fonctions  $u$  et  $v$  où :

$$u(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = \sin x$$

qui admettent pour dérivée les fonctions :

$$u'(x) = -\sin x \quad ; \quad v'(x) = \cos x$$

La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de la fonction  $h'$  :

$$h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= (-\sin x) \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$$

$$= -(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

- d La fonction  $j$  est définie par le carré de la fonction  $u$  où :

$$u(x) = \sin x \quad ; \quad u'(x) = \cos x$$

La formule de dérivation de la puissance d'exposant 2 d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction  $j'$  :

$$j'(x) = 2 \cdot u'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

### C.5

- a L'expression de la fonction  $f$  est donnée sous la forme du produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = x^2 \quad ; \quad v(x) = \cos x$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 2x \quad ; \quad v'(x) = -\sin x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x$$

- b L'expression de la fonction  $g$  est donnée sous la forme du produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = 3x^2 - 2 \quad ; \quad v(x) = (\sin x)^2$$

qui admettent pour dérivées :

•  $u'(x) = 6x$

- La fonction  $v$  est le carré de la fonction sinus. Sa dérivée a pour expression :

$$v'(x) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction  $g'$  :

$$g'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$= 6x \cdot (\sin x)^2 + (3x^2 - 2) \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

- c L'expression de la fonction  $h$  est définie par le quotient des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = 3 \quad ; \quad v(x) = 2 \cdot \cos x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 0 \quad ; \quad v'(x) = -2 \cdot \sin x$$

la formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $h'$  :

$$h'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{0 \times 2 \cdot \cos x - 3 \cdot (-2 \cdot \sin x)}{(2 \cdot \cos x)^2} = \frac{6 \cdot \sin x}{(2 \cdot \cos x)^2}$$

$$= \frac{6 \cdot \sin x}{4 \cdot (\cos x)^2} = \frac{3 \cdot \sin x}{2 \cdot (\cos x)^2}$$

- d La fonction  $j$  est définie par le quotient des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = 3x + \sin x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = -\sin x \quad ; \quad v'(x) = 3 + \cos x$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction  $j'$  :

$$j'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{-\sin x \cdot (3x + \sin x) - \cos x \cdot (3 + \cos x)}{(3x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-3x \cdot \sin x - (\sin x)^2 - 3 \cos x - (\cos x)^2}{(3x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-3x \cdot \sin x - 3 \cos x - [(\cos x)^2 + (\sin x)^2]}{(3x + \sin x)^2}$$

$$= \frac{-3x \cdot \sin x - 3 \cos x - 1}{(3x + \sin x)^2}$$

### C.6

- 1 L'expression de la fonction  $g$  est donnée sous la forme :

$$g(x) = u(x) \cdot v(x) - \sin x$$

où les fonctions  $u$  et  $v$  sont définies par :

$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \cos x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -\sin x$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction  $g'$  :

$$g'(x) = (u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - \cos x$$

$$= 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - \cos x = -x \cdot \sin x$$

Or, sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , la fonction  $g'$  est strictement négative; on en déduit que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .

On a les valeurs suivantes :

•  $f(0) = 0 \cdot \cos 0 - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

•  $f(\pi) = \pi \cdot \cos \pi - \sin \pi = -\pi - 0$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant :

|                  |       |        |
|------------------|-------|--------|
| $x$              | $\pi$ | 1      |
| Variation de $g$ | 0     | $-\pi$ |

D'après le tableau de variation, on en déduit que la fonction  $g$  est strictement négative sur  $]0; \pi]$  et nulle en 0.

- 2 La fonction  $f$  est définie par le quotient de la fonction  $u$  par la fonction  $v$  :

$$u(x) = \sin x \quad ; \quad v(x) = x$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = \cos x \quad ; \quad v'(x) = 1$$

Ainsi, la fonction  $f$  admet pour dérivée la fonction  $f'$  dont l'expression est donnée :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$= \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Le dénominateur de ce quotient est toujours positifs sur  $]0; \pi]$ ; ainsi, le signe de  $f'$  est celui de la fonction  $g$ : la fonction  $f'$  est strictement négative sur  $]0; \pi]$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; \pi]$ .

3 a • Considérons la fonction  $\varphi$  définie par la relation :

$$\varphi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi''(x) = -\sin x + x$$

$$\Rightarrow \varphi'''(x) = -\cos x + 1$$

Pour tout  $x \in [0; \pi]$ , on a l'encadrement :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

On en déduit :

$$-1 \leq -\cos x \leq 1$$

$$0 \leq -\cos x + 1 \leq 2$$

$$0 \leq \varphi'''(x) \leq 2$$

On en déduit que la fonction  $\varphi'''$  est positive sur  $[0; \pi]$  ;  $\varphi''$  est croissante sur  $[0; \pi]$ . On a le tableau de variations suivant :

|                          |                                                                                   |       |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|
| $x$                      | 0                                                                                 | $\pi$ |
| Variation de $\varphi''$ |  |       |

Ainsi, la fonction  $\varphi''$  est positive sur  $[0; \pi]$  et on en déduit que la fonction  $\varphi'$  est croissante sur  $[0; \pi]$  :

|                         |                                                                                   |       |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------|
| $x$                     | 0                                                                                 | $\pi$ |
| Variation de $\varphi'$ |  |       |

On en déduit que la fonction  $\varphi'$  est positive sur  $[0; \pi]$  ; ainsi, la fonction  $\varphi$  est croissante sur  $[0; \pi]$ .

- La fonction  $\varphi''$  est positive sur  $[0; \pi]$ , ainsi, on a l'inégalité suivante :

$$\varphi''(x) \geq 0 \Rightarrow x - \sin x \geq 0$$

- On a montré que la fonction  $\varphi$  est croissante et on a :

$$\varphi(0) = \sin 0 - 0 + \frac{0^3}{6} = 0$$

On en déduit que la fonction  $\varphi(x)$  est positive sur  $[0; \pi]$  :

$$\varphi(x) \geq 0$$

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$$

$$\frac{x^3}{6} \geq x - \sin x$$

$$x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

Des deux derniers points, on en déduit l'encadrement :

$$0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

- b) Pour déterminer la dérivabilité de la fonction  $f$  en 0, il suffit de montrer qu'elle admet un nombre dérivé à droite en 0 ; c'est-à-dire que la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \frac{\sin h - h}{h^2} \\ &= \frac{\sin h - h}{h^2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'encadrement suivant :

$$0 \leq h - \sin h \leq \frac{h^3}{6}$$

$$0 \leq \frac{h - \sin h}{h^2} \leq \frac{h^3}{6h^2}$$

$$0 \leq \frac{h - \sin h}{h^2} \leq \frac{h}{6}$$

Or, on a la limite suivante :  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{6} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h - h}{h^2} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

On en déduit que la fonction  $f$  est dérivable en 0 et qu'elle admet 0 pour nombre dérivée.

- 4) Ainsi, on a la représentation suivante :



C.7 Considérons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :  $f(x) = x - \cos x$

La dérivée de la fonction  $f$  s'exprime par :

$$f'(x) = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$$

Sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , la fonction sinus admet l'encadrement suivant pour tout réel  $x$  :

$$-1 < \sin x < 1$$

$$1 + (-1) < 1 + \sin x < 1 + 1$$

$$0 \leq f'(x) \leq 2$$

Ainsi, la fonction  $f'$  est strictement positive sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ . On en déduit que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

De plus, on a :  $f(0) = -1$  ;  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

En résumé, on a :

- la fonction  $f$  est continue sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  ;
- la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  ;
- la fonction  $f$  change de signe sur cet intervalle.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

$$\alpha - \cos \alpha = 0$$

C.8

- 1) La fonction  $f$  admet pour primitive la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \sin x + (-\cos x) = \sin x - \cos x$$

- 2) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = 3x \quad ; \quad u'(x) = 3$$

L'expression de la fonction  $g$  est donnée sous la forme :

$$g(x) = \sin(3x) = 3 \times \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) = 3 \times u'(x) \cdot \sin[u(x)]$$

Ainsi, la fonction  $g$  admet pour primitive la fonction  $G$  définie par :

$$G(x) = 3 \times [-\cos[u(x)]] = -\frac{3}{2} \cdot \cos(3x)$$

- 3) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = \sin x \quad ; \quad u'(x) = \cos x$$

Ainsi, la fonction  $h$  admet pour expression :

$$h(x) = \sin x \cdot \cos x = u'(x) \cdot u(x)$$

La fonction  $h$  admet pour primitive la fonction  $H$  définie par :

$$H(x) = \frac{1}{2} \cdot [u(x)]^2 = \frac{1}{2} \cdot (\sin x)^2$$

- 4) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = x^2 \quad ; \quad u'(x) = 2x$$

Ainsi, la fonction  $j$  admet pour expression :

$$\begin{aligned} j(x) &= 3x \cdot \cos(x^2) = \frac{3}{2} \times 2x \cdot \cos(x^2) \\ &= \frac{3}{2} \times u'(x) \cdot \cos[u(x)] \end{aligned}$$

La fonction  $j$  admet pour primitive la fonction  $J$  définie par :

$$J(x) = \frac{3}{2} \times \sin[u(x)] = \frac{3}{2} \cdot \sin(x^2)$$

#### C.9

- 1) La fonction  $f$  admet pour expression :

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} = 10 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi, la fonction  $f$  admet pour primitive la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = 10 \times \sqrt{x}$$

- 2) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = x + 1 \quad ; \quad u'(x) = 1$$

La fonction  $g$  admet pour expression :

$$g(x) = e^{x+1} + 1 = u'(x) \cdot e^{u(x)} + 1$$

Ainsi, la fonction  $g$  admet pour primitive la fonction  $G$  dont l'expression est :

$$G(x) = e^{x+1} + x$$

- 3) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$$

La fonction  $h$  admet pour expression :

$$h(x) = 2x \cdot e^{x^2+1} = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Ainsi, la fonction  $h$  admet pour primitive la fonction  $H$  définie par :

$$H(x) = e^{x^2+1}$$

- 4) La primitive de la fonction cosinus est la fonction sinus.

Ainsi, la fonction  $j$  admet pour primitive la fonction  $J$  définie par :

$$J(x) = \sin x$$

- 5) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = 3x \quad ; \quad u'(x) = 3$$

La fonction  $k$  admet pour expression :

$$k(x) = \sin(3x) = \frac{1}{3} \times 3 \cdot \sin(3x) = \frac{1}{3} \times u'(x) \cdot \sin[u(x)]$$

Ainsi, la fonction  $k$  admet pour primitive la fonction  $K$  qui admet pour expression :

$$K(x) = \frac{1}{3} \times [-\cos[u(x)]] = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x)$$

- 6) Considérons la fonction  $u$  définie par :

$$u(x) = 2x \quad ; \quad u'(x) = 2$$

La fonction  $m$  admet pour expression :

$$\begin{aligned} m(x) &= (\sin x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2 \cdot \cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times u'(x) \cdot \cos[u(x)] \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $m$  admet pour primitive la fonction  $M$  dont l'expression est :

$$M(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \sin[u(x)] = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \cdot \sin(2x)$$

#### C.10

- a) L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet également l'expression :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi & x &= \pi - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & & &= \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- b) L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, les solutions de cette équation admettent une des deux expressions suivantes où  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$x = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

L'ensemble des solutions de cette équation admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

#### C.11

- 1) a) L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$$

On en déduit les deux solutions dans l'intervalle des mesures principales :

$$x = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad x = -\frac{\pi}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right\}$$

- b) L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

On en déduit les deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x = -\frac{\pi}{6} & x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ & x = \pi + \frac{\pi}{6} \\ & x = \frac{6\pi + \pi}{6} \\ & x = \frac{7\pi}{6} \\ & x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right\}$$

**c** L'équation de l'énoncé :

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

admet pour expression :

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{\pi}{3} & x = \pi - \frac{\pi}{3} \\ & = \frac{3\pi - \pi}{3} \\ & = \frac{2\pi}{3} \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$

**d** L'équation de l'énoncé :

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

admet pour expression :

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

On en déduit les deux solutions de cette équation :

$$x = \frac{2\pi}{3} ; x = -\frac{2\pi}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans l'intervalle des mesures principales est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

**2 a** L'égalité de l'énoncé :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$$

Ainsi, le nombre  $x$  doit vérifier l'une des deux équations où  $k$  représente un entier relatif quelconque :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi ; x = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

**b** L'égalité de l'énoncé :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

donne l'égalité :

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi, le nombre  $x$  doit vérifier l'une des deux équations où  $k$  représente un entier relatif quelconque :

$$\begin{array}{l|l} x = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = \pi + \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = \frac{5\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & = -\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot (k+1) \cdot \pi \\ & = -\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot k' \cdot \pi \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions admet pour expression :

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

### C.12

**a** Résolvons l'équation suivante :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

On obtient les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{l|l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi & x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & x + \frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot \pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x = \frac{\pi}{12} + 2 \cdot k \cdot \pi & x = \frac{2 \cdot \pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ & x = \frac{5 \cdot \pi}{12} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{array}$$

Ainsi, les solutions de l'équation sont tous les angles ayant pour mesure principale  $\frac{\pi}{12}$  ou  $\frac{5 \cdot \pi}{12}$ .

Dans l'intervalle des mesures principales, on a :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{5 \cdot \pi}{12}\right\}$$

**b** Résolvons l'équation suivante :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

On obtient les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi & 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi & 2x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ 2x = -\frac{\pi}{12} + 2 \cdot k \cdot \pi & 2x = -\frac{7\pi}{12} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x = -\frac{\pi}{24} + k \cdot \pi & x = -\frac{7\pi}{24} + k \cdot \pi \end{array}$$

Les solutions de la première équation ont pour mesures principales :

$$-\frac{\pi}{24} ; \frac{23 \cdot \pi}{24}$$

Les solutions de la seconde équation ont pour mesures principales :

$$-\frac{7\pi}{24} ; \frac{17\pi}{24}$$

Dans l'intervalle des mesures principales, on a :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{7\pi}{24} ; -\frac{\pi}{24} ; \frac{17\pi}{24} ; \frac{23\pi}{24} \right\}$$

### C.13

a) Résolvons l'équation :

$$\cos(2 \cdot x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2 \cdot x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Cette équation se traduit par les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 2 \cdot x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 2 \cdot x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot k & \end{array}$$

- Pour la première équation, l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$\left\{ \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et définie pour  $k=-1$  et  $k=0$  deux mesures dans l'intervalle des mesures principales :

$$\left\{ -\frac{5\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} \right\}$$

- Pour la seconde équation, l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$\left\{ -\frac{\pi}{6} + \pi \cdot k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et définie pour  $k=0$  et  $k=1$  deux mesures dans l'intervalle des mesures principales :

$$\left\{ -\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Ainsi, dans l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$  des mesures principales, l'ensemble de solution de cette équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right\}$$

b) Résolvons l'équation :

$$\sin(2 \cdot x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2 \cdot x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Cette équation se traduit par les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 2 \cdot x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot k & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 2 \cdot x = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi \cdot k & \text{où } k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cdot x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k \\ x = \frac{2\pi}{6} + \pi \cdot k \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot k & \end{array}$$

- Pour la première équation, l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$\frac{\pi}{6} + \pi \cdot k$$

et définit pour  $k=-1$  et  $k=0$  deux mesures dans l'intervalle des mesures principales :

$$-\frac{5\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}$$

- Pour la première équation, l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{R}$  s'écrit :

$$\frac{\pi}{3} + \pi \cdot k$$

et définit pour  $k=-1$  et  $k=0$  deux mesures dans l'intervalle des mesures principales :

$$-\frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}$$

Ainsi, dans l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$  des mesures principales, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{5\pi}{6} ; -\frac{2\pi}{3} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3} \right\}$$

### C.14

1 a) On encadre la fonction cosinus sur  $[0 ; +\infty[$  par :

$$1 \leq \cos(4x) \leq 1$$

$$-e^{-x} \leq e^{-x} \cdot \cos(4x) \leq e^{-x}$$

b) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

À l'aide de l'encadrement obtenu à la question 1 et d'après le théorème des gendarmes, on obtient la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2) L'abscisse  $x$  d'un point commun aux courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  doit vérifier l'équation :

$$f(x) = g(x)$$

$$e^{-x} \cdot \cos(4x) = e^{-x}$$

La fonction exponentielle ne s'annulant pas :

$$\cos(4x) = 1$$

Cette équation se transforme en les deux équations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 4x = 0 + 2 \cdot k \cdot \pi & 4x = -0 + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x = k \cdot \frac{\pi}{2} & x = k \cdot \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Travaillant sur l'ensemble  $[0 ; +\infty[$ , l'ensemble des abscisses de tous les points communs aux deux courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  est :

$$\mathcal{S} = \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

3 a) On a les transformations suivantes :

$$u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = e^{-n \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \cos\left(4 \cdot n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= e^{-n \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \cos(2\pi \cdot n) = e^{-n \cdot \frac{\pi}{2}} \times 1$$

$$= e^{-n \cdot \frac{\pi}{2}} = \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

Cette expression du terme  $u_n$  de rang  $n$  montre que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $e^{-\frac{\pi}{2}}$ .

b) Le premier terme de la suite  $(u_n)$  a pour valeur :

$$u_0 = f\left(0 \times \frac{\pi}{2}\right) = f(0) = e^{-0} \cdot \cos(4 \times 0) = 1 \times 1 = 1$$

On a les encadrements suivants :

$$\frac{\pi}{2} > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} < 0$$

la fonction exponentielle est croissante :

$$e^{-\frac{\pi}{2}} < e^0$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit l'encadrement de la raison :

$$0 < e^{-\frac{\pi}{2}} < 1$$

La raison de la suite  $(u_n)$  est strictement positive et strictement inférieure à 1. De plus, le premier terme de la suite  $(u_n)$  est strictement positif.

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

- 4 a L'expression de la fonction  $f$  est donnée sous la forme du produit des fonctions  $u$  et  $v$  définies par :

$$u(x) = e^{-x} \quad ; \quad v(x) = \cos(4x)$$

qui admette pour dérivées :

$$u'(x) = -e^{-x} \quad ; \quad v'(x) = -4 \cdot \sin(4x)$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction  $f'$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (-e^{-x}) \cdot \cos(4x) + e^{-x} \cdot [-4 \sin(4x)] \\ &= -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)] \end{aligned}$$

- b Les points d'intersection de ces deux courbes sont de la forme  $k \cdot \frac{\pi}{2}$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Pour montrer que ces deux courbes admettent la même tangente en chacun de ces points, il suffit de montrer qu'ils ont même nombre dérivé :

$$\bullet f'\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -e^{k \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \cos\left(4 \times k \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \sin\left(4 \times k \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$= -e^{k \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \cos(2 \cdot k \cdot \pi) + 4 \cdot \sin(2 \cdot k \cdot \pi) \right]$$

$$= -e^{k \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot (1 + 4 \times 0) = -e^{k \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\bullet g'\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -e^{k \cdot \frac{\pi}{2}}$$

En chaque point de contact, ces deux courbes admettent la même tangente.

- 5 On a la valeur par excès :  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} = -0,2$

Voici la représentation demandée :

